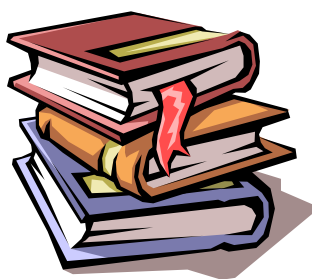


Tailieumontoan.com



[Điện thoại \(Zalo\) 039.373.2038](tel:039.373.2038)



CHUYÊN ĐỀ BÀI TẬP KÌ 2 **TOÁN 9 SẠC MỚI 2024**

[\(Liệu hệ tài liệu word có đáp án SĐT \(zalo\) : 039.373.2038\)](#)



Tài liệu sưu tầm, ngày 20 tháng 9 năm 2024

**CHƯƠNG VI: HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.****BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$** **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$**

Nhận xét. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Lời giải

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{27}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y .
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn các cặp điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

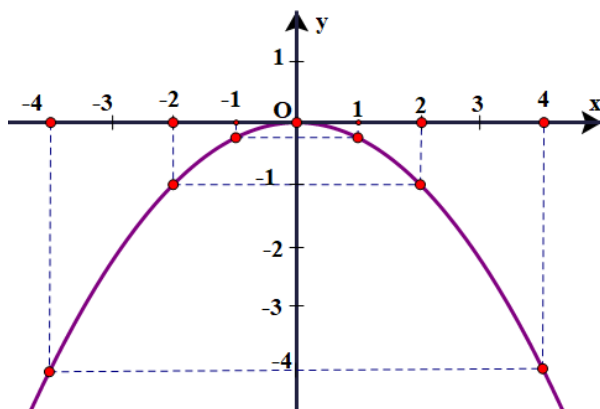
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Lời giải

Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

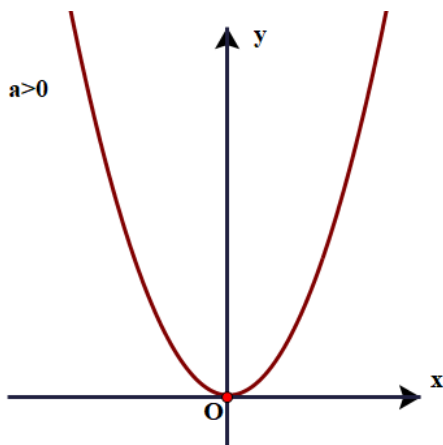
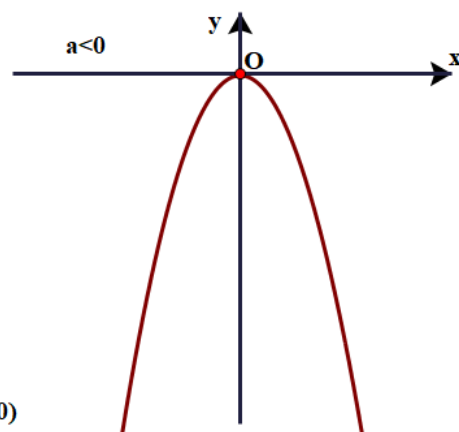
x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Biểu diễn các điểm $(-4; -4); (-2; -1); (-1; -\frac{1}{4}); (0; 0); (1; -\frac{1}{4}); (2; -1)$ và $(4; -4)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ như hình.

**Tính chất:**

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ O ,
- Có trục đối xứng là Oy ;
- Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)**Chú ý:**

Hai điểm (x, y) và $(-x, y)$ đối xứng nhau qua trục tung Oy .

Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

b) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và nhận xét về tính đối xứng giữa các điểm đó.

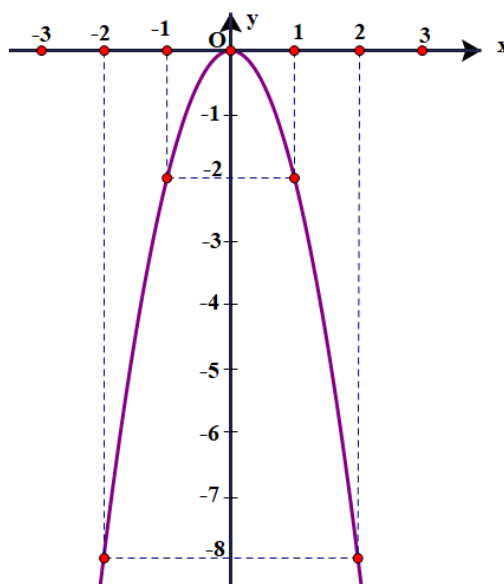
Lời giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



Biểu diễn các điểm $(-2; -8), (-1; -2), (0; 0), (1; -2)$ và $(2; -8)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ như hình.



b) Ta có $y = -\frac{1}{2}$ nên $-2x^2 = -\frac{1}{2}$, hay $x^2 = \frac{1}{4}$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

Nhận xét.

- Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$, ta cần xác định tối thiểu 5 điểm thuộc đồ thị là gốc tọa độ O và hai cặp điểm đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

- Do đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ nhận trục tung Oy là trục đối xứng nên ta có thể lập bảng giá trị của hàm số này với những giá trị x không âm và vẽ phần đồ thị tương ứng ở bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.1. Cho hàm số $y = 0,25x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

6.2. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao 10 cm.

a) Viết công thức tính thể tích V của lăng trụ theo a và tính giá trị của V khi $a = 2$ cm.

b) Nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì thể tích của hình lăng trụ thay đổi thế nào?

6.3. Diện tích toàn phần $S (\text{cm}^2)$ của hình lập phương, tức là tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai mặt đáy là một hàm số của độ dài cạnh a (cm).



a) Viết công thức của hàm số này.

b) Sử dụng công thức nhận được ở câu a để tính độ dài cạnh của một hình lập phương có diện tích toàn phần là 54cm^2 .

6.4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2$;

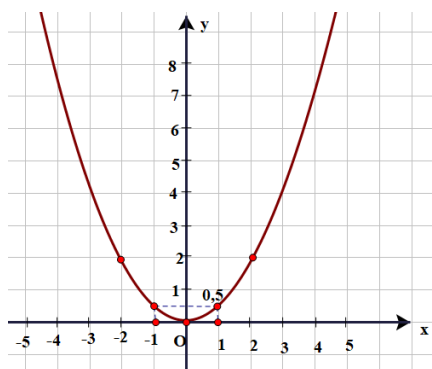
b) $y = -\frac{1}{3}x^2$

6.5. Biết rằng đường cong trong hình là một parabol $y = ax^2$.

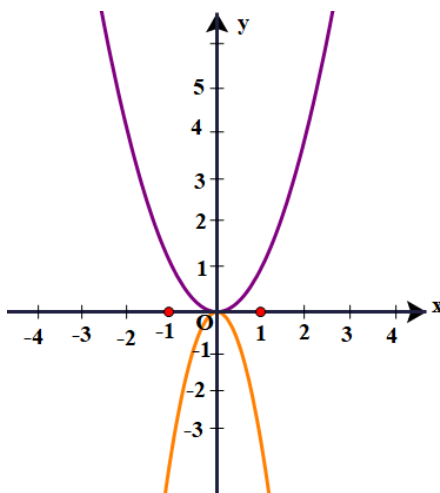
a) Tìm hệ số a .

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -2$.

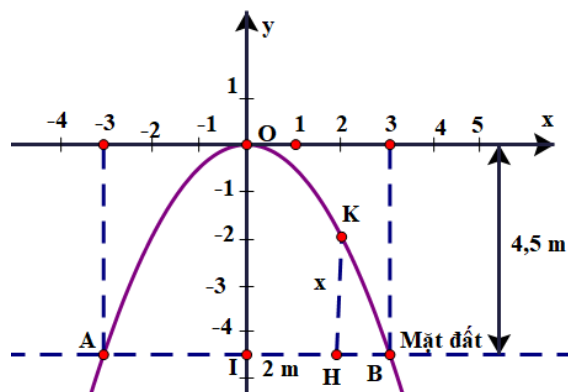
c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



6.6. Trong hình có hai đường cong là đồ thị của hai hàm số $y = -3x^2$ và $y = x^2$. Hãy cho biết đường nào là đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.



6.7. Một cổng vòm được thiết kế dạng parabol $y = ax^2$ như hình. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6\text{m}$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5\text{m}$.



C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giá trị hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$ tại $x = x_0$

1. Phương pháp giải

Để tính $f(x_0)$ ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2$. Hãy tính $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$

Ví dụ 2. Diện tích S của hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của hình tròn.

a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào các ô trống trong bảng sau ($\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

$R \text{ (cm)}$	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2 \text{ (cm}^2\text{)}$				

b) Nếu bán kính tăng gấp 3 lần thì diện tích tăng hay giảm bao nhiêu lần?

c) Tính bán kính của hình tròn, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng $79,5 \text{ cm}^2$.

Ví dụ 3. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường chuyển động S (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức: $S = 4t^2$.

a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 2 giây?

b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

Ví dụ 4.



Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Khi vận tốc gió bằng 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu-ton)



a) Tính hằng số a .

b) Hỏi khi $v = 10\text{ m/s}$ thì lực F bằng bao nhiêu?

Cùng câu hỏi này khi $v = 20\text{ m/s}$

c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N , hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc 90 km/h hay không?

Dạng 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$

1. Phương pháp giải

Lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y . Cho x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots$ rồi tìm giá trị y tương ứng bằng cách lập bảng.

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị $y = ax^2 \Leftrightarrow y_M = ax_M^2$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = -\frac{3}{2}x^2$. Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox .

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.



- b) Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ $x = -1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.
- c) Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ $x = 1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C' .
- d) Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị x điểm hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số đó.
- b) Tính các giá trị $f(-8); f(-1,3); f(-0,75); f(1,5)$.
- c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0,5)^2; (-1,5)^2; (2,5)^2$.
- d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}; \sqrt{7}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -0,75x^2$. Qua đồ thị hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

Dạng 3. Xác định hệ số a của hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$

1. Phương pháp giải

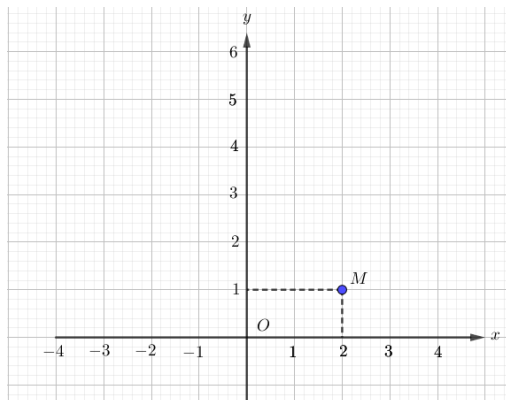
Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (P) . Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10; 30)$.

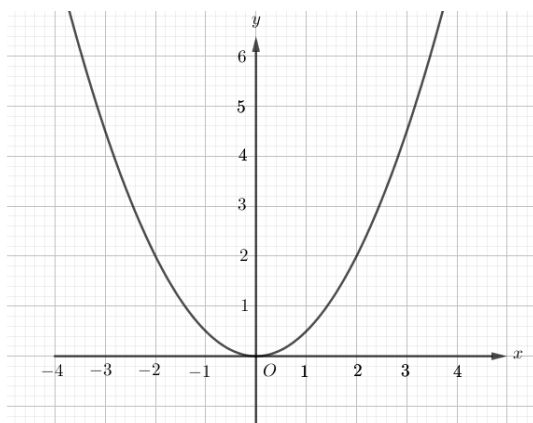
Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ có một điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$.

- a) Tìm hệ số a .
- b) Điểm $A(4; 4)$ có thuộc đồ thị không?
- c) Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.



Ví dụ 3. Biết rằng đường cong hình bên là một Parabol $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a .
- Tìm tung độ của điểm thuộc Parabol có hoành độ $x = -3$.
- Tìm các điểm thuộc Parabol có tung độ $y = 8$.



Dạng 4. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng

1. Phương pháp giải

- Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) ta viết phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 = bx + c \quad (1)$$

- Nếu (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P) .

- Nếu (1) có nghiệm thì (d) cắt (P) .

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm thì tung độ giao điểm là $y = ax_1^2$ hoặc $y = bx_1 + c$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$



- Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

- Tìm tọa độ giao điểm $A, B(x_A > x_B)$ của (d) và (P) .
- Tính diện tích tam giác OAB .

Dạng 5. Giải bất phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ (1)

- Vẽ đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng cách giải phương trình $f(x) = g(x)$.
- Nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ là tập hợp các giá trị x là hình chiếu của phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới đồ thị $y = g(x)$ lên trục hoành.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình sau bằng đồ thị $x^2 < x + 2$

Dạng 6. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho phương trình dạng $f(x) = m$ (m là tham số)

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ cùng phương với Ox và qua điểm có tọa độ $(0, m)$.
- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

- $-2x^2 = m$
- $x|x| = m$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = -3x^2$. Lập bảng tính các giá trị của y ứng với giá trị của x lần lượt bằng: -2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$; 1 ; 2 .



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

a) Chứng minh rằng $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .

b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ biết $f(a-1) = 4$.

Câu 3: Chứng minh rằng hàm số $y = -5x^2$ có các tính chất sau:

a) y không dương với mọi giá trị của x .

b) nếu $|x|$ gấp n lần thì y gấp n^2 lần.

Câu 4: Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$), Tìm các giá trị của m để:

a) có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.

b) hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

c) hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

Câu 5: Cho hàm số $y = -x^2$

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không?

$$A\left(3; \frac{9}{10}\right); \quad B\left(-5; \frac{5}{2}\right); \quad C(-10; 1)?$$

Câu 6: Xác định hệ số a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 9)$. Vẽ đồ thị trong trường hợp này.

Câu 7: Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2; 9)$ không?

Câu 8: Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

$$a) A(\sqrt{2}; m) \quad b) B(-\sqrt{2}; m) \quad c) C\left(m; \frac{3}{4}\right)$$

Câu 9: a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc O và điểm $M(2; 4)$.

b) Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2$ và đi qua $M(2; 4)$.

c) Vẽ parabol và đường thẳng trên trong cùng hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Câu 10: Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$.

Dựa vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) \geq g(x)$.

Câu 11: a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua $A(-1; 2)$

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm



- c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4
- d) Tìm tọa độ các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

Câu 12: Dựa vào đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^2 + 1 = m$

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P) .

1. Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1; -2)$.
2. Vẽ đồ thị (P) .
3. Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2.

Câu 14: Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

1. Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
2. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Câu 15: Trên parabol $(P): y = x^2$, ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C trên cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

**BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN**

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, những phương trình nào là phương trình bậc hai ẩn x ? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình đó.

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 3 = 0$;

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$;

d) $-5x^2 = 0$

Lời giải

a) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 2, b = -3, c = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 3 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 1, b = 0, c = -3$.

c) Phương trình $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$ không phải là phương trình bậc hai.

d) Phương trình $-5x^2 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = -5, b = 0, c = 0$.

2. CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT**Cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng khuyết**

Giải một phương trình bậc hai là tìm tất cả các nghiệm của nó. Dưới đây, thông qua một số ví dụ đơn giản, ta trình bày cách giải một số phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), mà khuyết số hạng bậc nhất (tức là $b = 0$) hoặc khuyết số hạng tự do (tức là $c = 0$), bằng phương pháp đặt nhân tử chung đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Chú ý:

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

- Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 4x = 0$;

b) $3x^2 + 8x = 0$

Lời giải

$$a) 2x^2 - 4x = 0$$

$$b) 3x^2 + 8x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$$x(3x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{8}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

Chú ý. Để giải phương trình bậc hai dạng $x^2 + bx = c$, ta có thể cộng thêm vào hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó có thể giải phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 4x = 1$.

a) Hãy cộng vào cả hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái có thể biến đổi thành một bình phương.

b) Dựa vào câu a và cách giải Ví dụ 3b, hãy giải phương trình đã cho.

Lời giải

$$a) x^2 - 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 5$$

b) Từ kết quả câu a, ta có: $x - 2 = \sqrt{5}$ hoặc $x - 2 = -\sqrt{5}$, suy ra là $x = 2 + \sqrt{5}$ hoặc $x = 2 - \sqrt{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

3. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cách giải phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ trong trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

- Chuyển hạng tử tự do c sang vế phải: $ax^2 + bx = -c$.

- Chia cả hai vế của phương trình cho hệ số a của x^2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

- Cộng vào hai vế của phương trình nhận được với $\frac{b^2}{4a^2}$ để vế trái có thể biến đổi thành bình phương

của một biểu thức: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ hay $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi là biệt thức của phương trình (Δ đọc là "delta").

Khi đó, ta có thể viết lại phương trình cuối dưới dạng $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Từ đây, ta có kết quả sau:

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5. Cho phương trình $3x^2 + 7x - 1 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c .

b) Tính biệt thức Δ .

c) Áp dụng công thức nghiệm, giải phương trình đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $a = 3, b = 7, c = -1$.

b) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 49 + 12 = 61$.

c) Do $\Delta > 0$, áp dụng công thức nghiệm, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{6}.$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

b) $2x^2 + 3x + 5 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

b) Ta có: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

Ví dụ 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 6x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 2, b' = 3, c = 1$ và $\Delta' = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có: $a = 1, b' = -2\sqrt{3}, c = 12$ và $\Delta' = (-2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 12 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = 2\sqrt{3}$$

4. TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể dễ dàng tìm nghiệm của các phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ 8. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$;

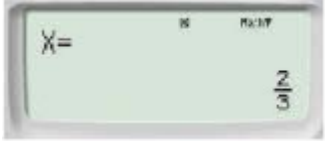
b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

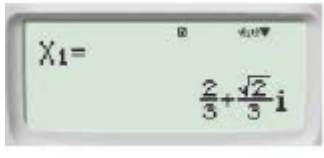
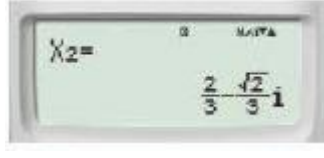
c) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$

Lời giải

Với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím    để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện như sau:

Tìm nghiệm của phương trình	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết luận
$2x^2 - 5x - 4 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4},$ $x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$
$9x^2 - 12x + 4 = 0$			Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$

$-3x^2 + 4x - 2 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình vô nghiệm
----------------------	---	---	------------------------

Chú ý. Để hiển thị kết quả xấp xỉ ở dạng số thập phân sau khi nhận kết quả ta bấm phím 

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.8. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và xác định các hệ số a, b, c của phương trình đó.

a) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - x$

b) $(2x+1)^2 = x^2 + 1.$

6.9. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + \frac{1}{3}x = 0;$

b) $(3x+2)^2 = 5.$

6.10. Không cần giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $11x^2 + 13x - 1 = 0;$

b) $9x^2 + 42x + 49 = 0;$

c) $x^2 - 2x + 3 = 0.$

6.11. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5} + 2 = 0;$

b) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

c) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0.$

6.12. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

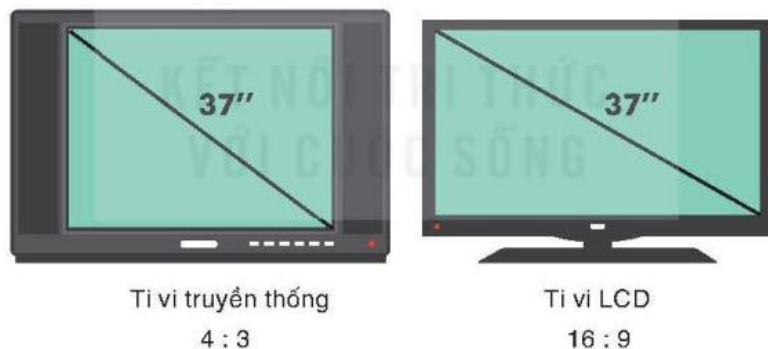
a) $0,1x^2 + 2,5x - 0,2 = 0;$

b) $0,01x^2 - 0,05x + 0,0625 = 0;$

c) $1,2x^2 + 0,75x + 2,5 = 0$

6.13. Độ cao h (mét) so với mặt đất của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 19,6 \text{ m/s}$ cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$, ở đó t là thời gian kể từ khi phóng (giây) (theo Vật lý/ đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Hỏi sau bao lâu kể từ khi phóng, vật sẽ rơi trở lại mặt đất?

6.14. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bằng độ dài đường chéo. Ti vi truyền thống có định dạng 4:3, nghĩa là tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 4:3. Hỏi diện tích của màn hình ti vi truyền thống 37 in là bao nhiêu? Diện tích của màn hình ti vi LCD 37 in có định dạng 16:9 là bao nhiêu? Màn hình ti vi nào có diện tích lớn hơn? Ở đây, các diện tích của màn hình được tính bằng inch vuông.



6.15. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 6 m và có diện tích là 140 m^2 . Tính các kích thước của mảnh vườn đó.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Khai triển rồi đưa các số hạng về vế trái, vế phải bằng 0.
- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đưa các phương, trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ chỉ rõ các hệ số a, b, c

a) $5x^2 + 2x = 4 - x$;

b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$.

c) $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$

d) $2x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$, m là một hằng số

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai dạng đặc biệt

1. Phương pháp giải

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
- Nếu $A^2 = B (B \geq 0)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 8 = 0$;

b) $5x^2 - 20 = 0$;

c) $0,4x^2 + 1 = 0$;

d) $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$

e) $-0,4x^2 + 1,2x = 0$

Ví dụ 2. Cho các phương trình :

$$a) x^2 + 8x = -2 \qquad b) x^2 + 2x = \frac{1}{3}$$

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

Ví dụ 3. Giải phương trình : $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Dạng 3. Xác định số nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)
- Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm (nghiệm kép).
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau :

$$\begin{array}{ll} a) 7x^2 - 2x + 3 = 0; & b) 5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0 \\ c) \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0 & d) 1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0 \end{array}$$

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:

$$a) 15x^2 + 4x - 2005 = 0; \qquad b) \frac{-19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0;$$

Dạng 4. Giải phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
- Tính Δ (hoặc Δ').
- Áp dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} a) 2x^2 - 7x + 3 = 0; & b) 6x^2 + x + 5 = 0; \\ c) 6x^2 + x - 5 = 0; & d) 3x^2 + 5x + 2 = 0; \\ e) y^2 - 8y + 16 = 0; & f) 16z^2 + 24z + 9 = 0. \end{array}$$

Ví dụ 2. Xác định a, b, c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình

- a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; b) $1385x^2 - 14x + 1 = 0$;
c) $5x^2 - 6x + 1 = 0$; d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$.

Ví dụ 3. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để tìm giá trị gần đúng (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) nghiệm của các phương trình:

- a) $3x^2 - 2x = x^2 + 3$; b) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x+1)(x-1)$;
c) $3x^2 + 3 = 2(x+1)$; d) $0,5x(x+1) = (x-1)^2$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình :

- a) $25x^2 - 16 = 0$; b) $2x^2 + 3 = 0$;
c) $4,2x^2 + 5,46x = 0$; d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

- a) $x^2 = 12x + 228$; b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12} = 19$.

Dạng 3: Các bài toán có liên quan đến phương trình bậc hai

Ví dụ 1. Radar của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng vận tốc v của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian bởi công thức :

$$v = 3t^2 - 30t + 135$$

(t tính bằng phút, v tính bằng km/h).

- a) Tính vận tốc của ô tô khi $t = 5$ phút.
b) Tính giá trị của t khi vận tốc ô tô bằng 120 km/h (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Ví dụ 2. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$

- a) Tính Δ'
b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt? Có nghiệm kép? Vô nghiệm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Viết các phương trình sau dưới dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ rồi xác định các hệ số a, b, c .

- a) $x^2 + 4x^2 = 4 - m^2$
b) $x^2 + p(x-1) = 1 - p$
c) $x^2\sqrt{2} + x - 2 = -x\sqrt{2}$

Câu 2: Giải các phương trình:

- a) $4x^2 - 9 = 0$ b) $2x^2 + 5 = 0$ c) $3x^2 - 6x = 0$

Câu 3: Giải các phương trình sau

a) $4x^2 - 9 = 0$.

b) $-2x^2 + 50 = 0$.

c) $3x^2 + 11 = 0$.

Câu 4: Giải các phương trình sau

a) $x(x-2) + 4x - 8 = 0$.

b) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

c) $2x^2 + 5x = 1$.

Câu 5: Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích hoặc dạng $a(x+m)^2 = n$

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$

b) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

c) $x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

Câu 6: Giải các phương trình sau bằng cách áp dụng $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$

a) $x^2 + 2x + 1 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$

b) $2x^2 - 3(2x - 3)^2 = 0$

c) $9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$

d) $x^2 - 6x + 7 = 0$

Câu 7: Giải phương trình sau:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0$

c) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 6x + 7 = 0$

Câu 8: Xác định hệ số c trong phương trình $x^2 - 6x + c = 0$ để phương trình có một nghiệm là 5. Giải phương trình đó.

Câu 9: Giải các phương trình sau:

b) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16 = 0$ b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$

Câu 10: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 8 = 0$; b) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$;

c) $5x^2 - 3x + 15 = 0$; d) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = \frac{8}{3}; x_2 = -1$

b) $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$

c) Vô nghiệm

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;

b) $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - \frac{1}{12} = 0$;

c) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$;

d) $(x-1)(x+2) = 70$.

Câu 12: Giải các phương trình sau:

a) $(2 - \sqrt{5})x^2 - x + (\sqrt{5} - 1) = 0$

b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$

Câu 13: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$9x^2 - 6mx + m(m - 2) = 0$.

Câu 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó:

a) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$

b) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$

Câu 15: Xác định m để phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 4x + 2m = 0$

b) $m^2x^2 + mx + 5 = 0$

Câu 16: Cho phương trình $mx^2 - (2m + 1)x + (m + 1) = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) với $m = -\frac{3}{5}$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Câu 17: Chứng minh rằng phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c

Câu 18: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh phương trình sau vô nghiệm:

$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$.

BÀI 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH LÝ VIÈTE

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 + 11x + 7 = 0$;

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 65 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{7}{2}$

b) Ta có: $\Delta' = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm trùng nhau x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = 3$; $x_1 x_2 = \frac{9}{4}$.

2. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE ĐỂ TÍNH NHẨM NGHIỆM

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Ví dụ 2. Bằng cách nhẩm nghiệm, hãy giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

b) $5x^2 + 14x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 5$.

b) Ta có: $a - b + c = 5 - 14 + 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$, biết phương trình có một nghiệm là $x_1 = 3$.

Lời giải

Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 x_2 = 12$.

Do đó, $x_2 = \frac{12}{x_1} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3, x_2 = 4$.

3. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 4: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tích của chúng bằng 20.

Lời giải

Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1; \sqrt{\Delta} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{9-1}{2} = 4; x_2 = \frac{9+1}{2} = 5$.

Vậy hai số cần tìm là 4 và 5.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$;

b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$;

c) $3x^2 - 10 = 0$;

d) $x^2 - x + 3 = 0$.

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$;

b) $3x^2 + 11x + 8 = 0$;

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1 = 2$.

6.25. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 20, uv = 99$;

b) $u + v = 2, uv = 15$.

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $3x^2 + 5x - 2$.

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích 500m^2 và chu vi là 150 m. Tính các kích thước của bể bơi này.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

1. Phương pháp giải

□ Tính Δ và chứng tỏ $\Delta \geq 0$ để phương trình có nghiệm.

□ Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có).

Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

b) $5x^2 - x - 35 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

c) $8x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$.

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau:

a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + x + 2 = 0$;

d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m .

a) $x^2 - 2x + m = 0$;

b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm

1. Phương pháp giải

□ Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

□ Nhẩm: $S = x_1 + x_2 = m + n$; $P = x_1 \cdot x_2 = m \cdot n$. thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$; $x_2 = n$.

□ Nếu $a + b + c = 0$ thì $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

□ Nếu $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $35x^2 - 37x + 2 = 0$;

b) $7x^2 + 500x - 507 = 0$;

c) $x^2 - 49x - 50 = 0$;

d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$

Ví dụ 2. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm các nghiệm của phương trình.

$$a) x^2 - 7x + 12 = 0 \quad b) x^2 + 7x + 12 = 0.$$

Ví dụ 3. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

$$\begin{aligned} a) \quad 1,5x^2 - 1,6x + 0,1 &= 0 & b) \quad \sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 &= 0 \\ c) \quad (2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) &= 0; & d) \quad (m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 &= 0 \text{ với } m \neq 1. \end{aligned}$$

Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

1. Phương pháp giải

- ☐ Từ hệ thức cho trước của x, y tìm tổng $S = x + y$, tích $P = x.y$.
- ☐ x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

$$\begin{aligned} a) \quad u + v &= 32, u.v = 231; \\ b) \quad u + v &= -8, u.v = -105; \\ c) \quad u + v &= 2, u.v = 9. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

$$\begin{aligned} a) \quad u + v &= 42, \quad u.v = 441 \\ b) \quad u + v &= -42; \quad u.v = -400 \\ c) \quad u - v &= 5; \quad u.v = 24 \end{aligned}$$

Dạng 4. Phân tích $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

1. Phương pháp giải

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử.

$$a) \quad 2x^2 - 5x + 3; \quad b) \quad 3x^2 + 8x + 2.$$

Ví dụ 2. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Ví dụ 3. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

Dạng 5. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó

1. Phương pháp giải

- ☐ Tính tổng hai nghiệm $S = x_1 + x_2$ và tích hai nghiệm $P = x_1.x_2$.
- ☐ Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ là $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là cặp số sau:

a) 7 và 3 ;

b) $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$.

Ví dụ 2.

a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$.

b) Lập phương trình bậc hai có hệ số nguyên và có một nghiệm là $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Dạng 6. Dấu nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ (1)

Định m để phương trình:

a) Có hai nghiệm trái dấu;

b) Có hai nghiệm dương phân biệt

c) Có đúng một nghiệm dương.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $x^2 + 4x + m = 0$

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương: $x^2 - 2x + m = 0$

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Dạng 7. Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

* Biểu thức x_1, x_2 gọi là đối xứng nếu ta thay x_1 bởi x_2 và x_2 bởi x_1 thì biểu thức không đổi.

* Biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P (tổng và tích các nghiệm số)

Chẳng hạn

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2(k-1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Ví dụ 5. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$.

Dạng 9. Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số

1. Phương pháp giải

- Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm: $\Delta \geq 0$;
- Từ hệ thức Vi-ét tìm S, P theo tham số m ;
- Khử tham số m từ S, P để có hệ thức giữa S, P (tức là hệ thức giữa x_1, x_2) Không phụ thuộc tham số m .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1. Giải phương trình với $m = -3$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m .

Ví dụ 2. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$

Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Dùng định lí Vi-ét để nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- a) $x^2 - 10x + 16 = 0$; d) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
b) $x^2 - 15x + 50 = 0$; e) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; g) $x^2 - x - 20 = 0$;

Câu 2: Dùng điều kiện $a+b+c=0$ hoặc $a-b+c=0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

- a) $(m+1)x^2 + 3mx + 2m - 1 = 0$ ($m \neq -1$).
b) $(2m-1)x^2 - mx - m - 1 = 0$ ($m \neq \frac{1}{2}$).

Câu 3: Lập các phương trình bậc hai có nghiệm là các cặp số sau:

- a) 10 và 8; b) 10 và -8; c) 3 và $\frac{1}{4}$;

d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$; e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;

Câu 4: Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2$. b) $B = |x_1 - x_2|$.

c) $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$. d) $D = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}$.

Câu 6: Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 18$ và $xy = 77$.

b) $x + y = -3$ và $xy = 5$.

c) $x - y = 2\sqrt{3}$ và $xy = 1$.

d) $x^2 + y^2 = 34$ và $xy = -15$.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Câu 8: Phương trình $3x^2 + 7x + m = 0$ có một trong các nghiệm bằng 1. Xác định số m và tìm nghiệm còn lại.

Câu 9: a) Phương trình $0,1x^2 - x + k = 0$ có một trong các nghiệm bằng -1 . Xác định số k và tìm nghiệm còn lại.

b) Phương trình $15x^2 + bx - 1 = 0$ có một trong các nghiệm bằng $\frac{1}{3}$. Xác định số b và tìm nghiệm còn lại.

Câu 10: Cho phương trình: $x^2 + (m+1)x + m = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm. Tìm nghiệm của (1);

b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất nếu x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

Câu 11: Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $3x_1 - 4x_2 = 11$;

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều âm;

c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Câu 12: Xác định K để phương trình sau có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = 2x_2$.

a) $x^2 + 6x + K = 0$; b) $x^2 + Kx + 8 = 0$.

- Câu 13:** Xác định K để phương trình $x^2 + 2x + K = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa một trong các điều kiện sau:
- a) $x_1^2 - x_2^2 = 12$; b) $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- Câu 14:** Giả sử x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - (m-3)x + 2m+1 = 0$. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .
- Câu 15:** Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.
- a) Định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu;
- b) Định m để phương trình có đúng một nghiệm âm;
- c) Định m để phương trình có một nghiệm bằng 0. Tìm nghiệm còn lại;
- d) Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m ;
- e) Định m để phương trình có hai nghiệm thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
- Câu 16:** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số).
- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào m .
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x_1^2 + x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho)
- Câu 17:** Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ (x là ẩn số)
- a) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.
- b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn: $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$.
- Câu 18:** Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0$ (m là tham số)
- a) Giải phương trình đã cho với $m = 1$.
- b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - 9x_2 = 0$
- Câu 19:** Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$
- Câu 20:** Cho phương trình $x^2 - (2m+2)x + 2m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2}$
- Câu 21:** Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để $A = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.
- Câu 22:** Cho phương trình $x^2 + 4x + m + 3 = 0$ (x là ẩn)
- a) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2^2 = 51$

BÀI 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Nhận xét. Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 1: Một sân bóng đá 7 người có chiều rộng nhỏ hơn chiều dài 30 m và có diện tích bằng 1800m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của sân bóng đó.

Lời giải

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của sân bóng. Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài của sân bóng là $x + 30(\text{m})$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(x + 30) = 1800$ hay $x^2 + 30x - 1800 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 15^2 + 1800 = 2025, \sqrt{\Delta'} = 45$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-15 - 45}{1} = -60 \text{ (loại); } x_2 = \frac{-15 + 45}{1} = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy sân bóng có chiều dài 60 m và chiều rộng 30 m.

Ví dụ 2: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 36 km. Một tàu du lịch đi từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Thời gian kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A là 5,5 giờ. Hãy tìm vận tốc thực của tàu du lịch (tức là vận tốc của tàu khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc của dòng nước là 3km/h .

Lời giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc thực của tàu du lịch. Vì vận tốc của dòng nước là 3km/h nên phải có điều kiện $x > 3$ để tàu có thể chạy ngược dòng.

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là $x + 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi xuôi dòng là $\frac{36}{x + 3}$ (giờ).

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là $x - 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi ngược dòng là $\frac{36}{x - 3}$ (giờ).

Thời gian tàu nghỉ tại bến B là 30 phút $= 0,5$ giờ.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{36}{x+3} + 0,5 + \frac{36}{x-3} = 5,5$ hay $\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5$

Để giải phương trình này, ta quy đồng mẫu về trái của phương trình: $\frac{36(x-3) + 36(x+3)}{(x+3)(x-3)} = 5$

Nhân cả hai vế của phương trình với $(x+3)(x-3)$ để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai

$$36(x-3) + 36(x+3) = 5(x+3)(x-3), \text{ hay } 5x^2 - 72x - 45 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 36^2 - 5 \cdot (-45) = 1521$; $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1521} = 39$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{36-39}{5} = \frac{-3}{5} \text{ (loại); } x_2 = \frac{36+39}{5} = 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc thực của tàu du lịch là 15 km/h.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.28. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tìm các kích thước của mảnh đất đó.

6.29. Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 1200000 người lên 1452000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

6.30. Một thanh sô cô la có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 12 cm, chiều rộng 7 cm và độ dày 3 cm. Do giá nguyên liệu cao tăng nhưng vẫn muốn giữ nguyên giá bán nên nhà sản xuất quyết định giảm 10% thể tích của mỗi thanh sô cô la. Để thực hiện việc này, nhà sản xuất dự định làm thanh sô cô la mới có cùng độ dày 3 cm như thanh cũ, nhưng chiều dài và chiều rộng sẽ giảm đi cùng một số centimét. Hỏi kích thước của thanh sô cô la mới là bao nhiêu?

6.31. Một máy bay khởi hành từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh, sau đó nghỉ 96 phút và tiếp tục bay về Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 100 km/h. Tổng thời gian của cả hành trình, kể từ khi xuất phát từ Hà Nội đến khi quay về Hà Nội là 6 giờ. Tính vận tốc của máy bay lúc đi, biết quãng đường bay Hà Nội - Thành phố Hồ Chí Minh dài khoảng 1200 km.

6.32. Một ô tô khách khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng. Sau đó 30 phút, một ô tô con xuất phát từ cùng địa điểm ở Hà Nội và cũng đi về Hải Phòng trên cùng tuyến đường, với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô khách là 20 km/h. Hai xe đến cùng một địa điểm ở Hải Phòng tại cùng một thời điểm. Hãy tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng quãng đường Hà Nội - Hải Phòng dài khoảng 120 km.

6.33. Một xưởng may phải may 1500 chiếc áo trong thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Toán Về Quan Hệ Giữa Các Số

1. Phương pháp giải

- Tổng hai số x, y là $x + y$

- Tổng bình phương hai số x, y là $x^2 + y^2$
- Tổng nghịch đảo của hai số x, y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

Ví dụ 2. Đồ em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

Ví dụ 3. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Dạng 2: Toán Chuyển Động

1. Phương pháp giải:

☒ Sử dụng công thức $S = V.t$; trong đó S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

Suy ra $V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}.$

☒ Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại 1 giờ ở thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

Ví dụ 2: Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Ví dụ 3: Khoảng cách giữa hai bên sông A và B là 30km. Một canô đi từ bến A đến bến B , nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A . Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3km/h.

Dạng 3: Toán Làm Chung Công Việc

1. Phương pháp giải

Đưa về năng suất làm việc:

Nếu đội nào đó làm xong toàn bộ công việc trong x ngày thì trong 1 ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội I hoàn thành công việc nhanh hơn đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc?

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Ví dụ 3. Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Dạng 4: Toán Có Nội Dung Hình Học

1. Phương pháp

Áp dụng các công thức sau:

☒ Định lý Pi-ta-go: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

☒ Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.

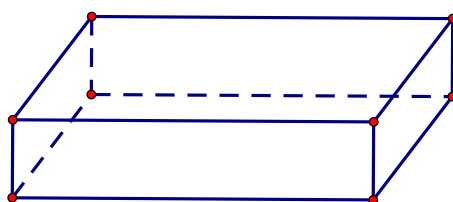
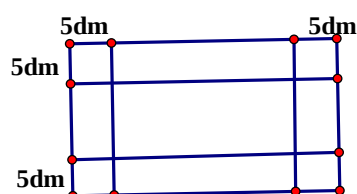
☒ Diện tích hình thang: $S = \frac{(a+b)}{2}.h$ hoặc $S = m.h$. Trong đó a, b là độ dài hai đáy; h là chiều cao; m là độ dài đường trung bình.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $240 m^2$. Nếu tăng chiều rộng lên 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất?

Ví dụ 2. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là $5400 cm^2$. Tính chu vi hình chữ nhật.

Ví dụ 3: Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở 4 góc bốn hình vuông có cạnh bằng 5dm để làm thành một cái thùng không nắp có dung tích $1500 dm^3$ (H.15). Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



Dạng 5: Năng suất

1. Phương pháp

☒ Khối lượng công việc = Năng suất $\times$ Thời gian.

☒ Năng suất = Khối lượng công việc $\div$ Thời gian

☒ Thời gian = Khối lượng công việc $\div$ Năng suất

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kỹ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Dạng 6: Các Dạng Khác

Ví dụ 1: Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm bác phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

Ví dụ 2: Miếng kim loại thứ nhất nặng 880g, miếng kim loại thứ 2 nặng 858g. Thể tích của miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 1 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại?

Ví dụ 3. Người ta đổ thêm 200g nước vào một dung dịch chứa 40g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đó đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu nước?

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Câu 2: Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu bình phương của chúng bằng 119.

Câu 3: Một ca nô đi xuôi dòng 45km rồi ngược dòng 18km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6km/h. Tính vận tốc ca nô lúc ngược dòng.

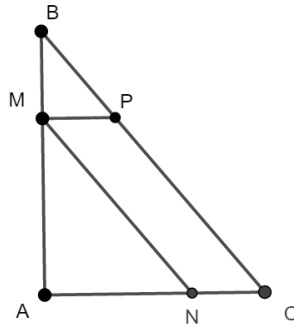
Câu 4: Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

Câu 5: Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

Câu 6: Một đa giác lồi tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Câu 7: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 12\text{ cm}$. Điểm M chạy trên AB . Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (như hình bên dưới). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng 32 cm^2 .



- Câu 9:** Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?
- Câu 10:** Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng?
- Câu 11:** Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?
- Câu 12:** Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km ; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h . Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại điểm C cách A là 8 km . Tính vận tốc thực của ca nô.
- Câu 13:** Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.
- Câu 14:** Hướng ứng chiến dịch mùa hè xanh tình nguyện năm 2013, lớp 9A của trường THCS Nguyễn Văn Trỗi được giao trồng 480 cây xanh, lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho mỗi bạn trong lớp. Đến buổi lao động có 8 bạn phải đi làm việc khác nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây nữa mới xong. Tính số học sinh của lớp 9A.
- Câu 15:** Người ta hòa tan 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn 200 kg/m^3 để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng (giả sử 2 chất lỏng không có xảy ra phản ứng hóa học).
- Câu 16:** Hai đội công nhân A và B dự định cùng làm một công việc trong 4 giờ 48 phút thì hoàn thành. Sau khi hai đội làm chung với nhau trong 2 giờ, thì số lượng công nhân ở đội A và đội B thay đổi nên năng suất của đội A bằng $\frac{1}{2}$ năng suất ban đầu của đội A và năng suất làm việc của đội B bằng $\frac{11}{4}$ năng suất làm việc ban đầu của đội B ; vì vậy hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định. Hỏi nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trên trong mấy giờ?

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Giả sử số lượng cá trong một hồ nào đó tăng, giảm theo công thức:

$$P = 50(100 + 15t - t^2), 0 \leq t \leq 15.$$

Ở đây P là số lượng cá trong hồ sau t năm tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2020, khi lần đầu tiên số lượng cá trong hồ được ước tính. Hỏi theo mô hình này, thì:

- a) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ là 7500 con?
- b) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ trở lại như tại thời điểm ban đầu vào ngày 01 tháng 01 năm 2020?

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.16. Biết rằng parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; 4\sqrt{3})$.

- a) Tìm hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được.
- b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -1$.
- c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 5\sqrt{3}$.

6.17. Công thức $E = \frac{1}{2}mv^2$ (J) được dùng để tính động năng của một vật có khối lượng m (kg) khi chuyển động với vận tốc v (m/s) (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Giả sử một quả bóng có khối lượng 2 kg đang bay với vận tốc 6 m/s. Tính động năng của quả bóng đó.
- b) Giả sử động năng của quả bóng đang bay có khối lượng 1,5kg là 48 J, hãy tính vận tốc bay của quả bóng đó.

6.18. Chiều dài l (mét) của một con lắc đơn tỉ lệ thuận với bình phương chu kì T (giây) của nó (chu kì là thời gian để thực hiện một dao động). Con lắc đơn có chiều dài 223,4cm thì có chu kì 3 giây.

- a) Tìm công thức liên hệ giữa l và T .
- b) Tìm chiều dài của con lắc có chu kì 5 giây.
- c) Chu kì của con lắc có chiều dài 0,98m là bao nhiêu?

(Trong tất cả các câu trên, kết quả được tính chính xác đến hàng phần mười).

6.19. Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình sau:

- a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 9x + 3 = 0$;
c) $11x^2 - 13x + 5 = 0$; d) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.20. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

- a) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;
b) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{7} = 0$.

6.21. Từ một tấm tôn hình vuông, người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh 8 cm ở bốn góc, sau đó gấp thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp và có thể tích là 200cm^3 . Tính độ dài cạnh của tấm tôn hình vuông ban đầu.

6.22. Giả sử doanh thu (nghìn đồng) của một cửa hàng bán phở trong một ngày có thể mô hình hoá bằng công thức $R(x) = x(220 - 4x)$ với $30 \leq x \leq 50$, trong đó x (nghìn đồng) là giá tiền của một bát phở. Nếu muốn doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng thì giá bán của mỗi bát phở phải là bao nhiêu?

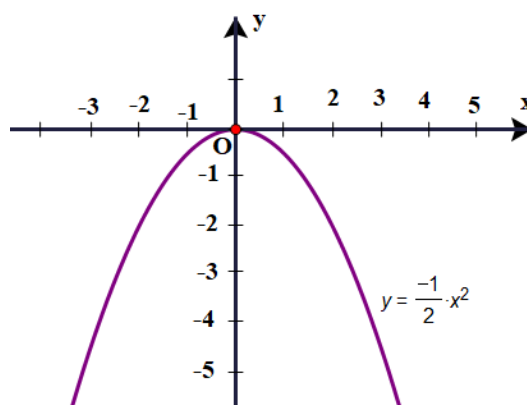
C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Lực $F(\text{N})$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(\text{m/s})$ của gió theo công thức: $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng 120N .

- a) Tính hằng số a .
b) Khi tốc độ của gió là $v = 10\text{m/s}$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?
c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là 12000N . Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là 90km/h hay không? Vì sao?

Câu 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.

- a) Các điểm $M(-2; -2)$; $N(2; -2)$ có thuộc parabol đó hay không?
b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Oy .



Câu 3: Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $y = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8\text{m}$.
a) Tính hoành độ của hai điểm A, B.

b) Tính chiều cao của cổng.

Câu 5:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn: a) Vẽ parabol $y = x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Câu 7: Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 - (2\sqrt{6} + 3)x + 3\sqrt{6} = 0$.

Câu 8: Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau:

$$x^2 - 2(m+3)x + (m^2 - 5) = 0 \quad (1)$$

1. Giải phương trình với $m = 2$.

2. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, nghiệm kép, vô nghiệm?

3. Tính hiệu của nghiệm lớn và nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có hai nghiệm.

Câu 9: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + 2x + m - 2 = 0$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Câu 10: Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Câu 11: Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta \geq 0, \forall m$.

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 7x + 5 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính $A = x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 = 29 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 5$.

Do đó $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7^2 - 2 \cdot 5 = 39$.

Ví dụ 2: Có hai miếng kim loại: miếng thứ nhất nặng 600 g; miếng thứ hai nặng 640 g. Thể tích của miếng thứ nhất lớn hơn thể tích của miếng thứ hai là 120 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất nhỏ hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 5 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

Lời giải

Gọi $x (\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất. Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x + 5 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất là $\frac{600}{x} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai là $\frac{640}{x+5} (\text{cm}^3)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{640}{x+5} = 120$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+5)$ để khử mẫu, ta được:

$$600(x+5) - 640x = 120x(x+5), \text{ hay } 3x^2 + 16x - 75 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 8^2 - 3 \cdot (-75) = 289; \sqrt{\Delta'} = 17$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-8-17}{3} = \frac{-25}{3} \text{ (loại); } x_2 = \frac{-8+17}{3} = 3 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là 3 g/cm^3 và khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là 8 g/cm^3 .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.34. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$ b) $2x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - 3 + \sqrt{3} = 0$

6.35. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $(x_1 - x_2)^2$.

6.36. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 15, uv = 56$; b) $u^2 + v^2 = 125, uv = 22$.

6.37. Một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật, không có nắp, có đáy là hình vuông, tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là 800cm^2 . Chiều cao của hộp là 10 cm. Tính độ dài cạnh đáy của chiếc hộp (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

6.38. Nhu cầu của khách hàng đối với một loại áo phông tại một cửa hàng được cho bởi phương trình $p = 100 - 0,02x$, trong đó p là giá tiền của mỗi chiếc áo (nghìn đồng) và x là số lượng áo phông bán được. Doanh thu R (nghìn đồng) khi bán được x chiếc áo phông là: $R = xp = x(100 - 0,02x)$. Hỏi cần phải bán được

bao nhiêu chiếc áo phông để doanh thu đạt 120 triệu đồng?

C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Câu 2: Giải phương trình:

a) $(2x + 1)^2 = 8x$ (1)

b) $(3x - 1)(x + 1) = 15$ (2)

c) $2x^2 + 3x - (x - 1)(x - 2) = 0$ (3)

Câu 3: Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Câu 4: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, ở đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

- Câu 7:** Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.
- Câu 8:** Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi 1 giờ, ô tô dừng lại 10 phút. Do đó để đến B đúng như dự kiến, ô tô phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính vận tốc ban đầu của ô tô.
- Câu 9:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.
- Câu 10:** Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài hơn chiều rộng là 7 m. Tính diện tích của mảnh đất.
- Câu 11:** Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.
- Câu 12:** Dân số của một tỉnh sau hai năm tăng từ 2000000 người lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?
- Câu 13:** Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5m. Khi đi trên đoạn đường dài 100 m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.
- Câu 14:** Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng là $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của chất lỏng.
- Câu 15:** Miếng kim loại thứ nhất nặng 880g, miếng kim loại thứ hai nặng 858 g. Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là 10cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là 1g/cm^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \frac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị g/cm^3 , M là khối lượng tính bằng đơn vị g, V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3 .)

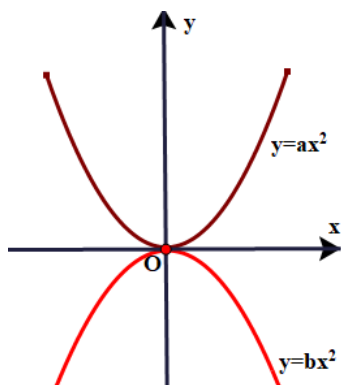
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

6.39. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

- A. (1;2). B. (2;1). C. (-1;2). D. $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

6.40. Hình dưới là hai đường parabol trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a < 0 < b$. B. $a < b < 0$. C. $a > b > 0$. D. $a > 0 > b$.

6.41. Các nghiệm của phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ là

- A. $x_1 = 3; x_2 = 4$. B. $x_1 = -3; x_2 = -4$.
C. $x_1 = 3; x_2 = -4$. D. $x_1 = -3; x_2 = 4$.

6.42. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 13$ và $x_2 = 25$ là

- A. $x^2 - 13x + 25 = 0$. B. $x^2 - 25x + 13 = 0$.
C. $x^2 - 38x + 325 = 0$. D. $x^2 + 38x + 325 = 0$.

6.43. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là

- A. 13. B. 19. C. 25. D. 5.

6.44. Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24cm^2 là

- A. 5 cm và 4 cm. B. 6 cm và 4 cm.
C. 8 cm và 3 cm. D. 10 cm và 2 cm.

B. TỰ LUẬN

6.45. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ và $y = -\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

6.46. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a , biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$. Vẽ đồ thị của hàm số trong trường hợp đó.

6.47. Giải các phương trình sau:

a) $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.48. Cho phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$;

b) $x_1^3 + x_2^3$.

6.49. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 13$ và $uv = 40$;

b) $u - v = 4$ và $uv = 77$.

6.50. Các kỹ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d = 0,05v^2 + 1,1v$, để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

6.51. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút sổ tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một sổ tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

6.52. Hai khối học sinh lớp 8 và lớp 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

C. BÀI TẬP THÊM

TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-7)x - m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số của m để (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-6)x + m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số của m nhỏ hơn 10 để (P) và (d) không có điểm chung phân biệt.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-9)x + m$ với m là tham số. Biết rằng (P) và (d) có đúng một điểm chung. Hỏi m có tính chất nào sau đây?

A. $4 < m < 5$.

B. $m > 5$.

C. $3 < m < 4$.

D. $m < 3$.

Câu 4: Cho parabol $(P): y = (m^2 + 1)x^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để (P) đi qua điểm $A(2;8)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

- Câu 5:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m^2 - 4)x - m^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để (P) và (d) có một điểm chung.
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 6:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và một số dương a cố định, có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ bằng a ?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 7:** Cho parabol $(P): y = x^2$, biết rằng không có điểm trên (P) có tung độ bằng a . Hỏi a có tính chất nào sau đây
- A. $\sqrt{a^2} = a$. B. $\sqrt{a^2} = -a$. C. $|a| = a$. D. $a = 0$.
- Câu 8:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và số a có tính chất trên (P) đúng 1 điểm có tung độ bằng a . Có bao nhiêu số a như vậy?
- A. 0. B. 1 C. 2. D. 3.
- Câu 9:** Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là
- A. $S = \{1; 2\}$. B. $S = \{-2; 1\}$. C. $S = \{-2; -1\}$. D. $S = \{-1; 2\}$
- Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.
- A. $m < -2$. B. $m \geq -2$. C. $m > -2$. D. $m \leq -2$.
- Câu 11:** Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có một nghiệm $x = 2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $a + b + c = 0$. B. $a + b + c = 2$.
C. $4a + 2b + c = 0$. D. $c = 2$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = -bx + c$ có đồ thị là đường thẳng d , với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.
- A. $b^2 - 4ac < 0$. B. $b^2 - 4ac > 0$
C. $b^2 + 4ac < 0$. D. $b^2 + 4ac > 0$.
- Câu 13:** Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt. Kết luận nào sau đây là đúng?
- A. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
B. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nghiệm kép.
C. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ vô nghiệm.
D. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.
- Câu 14:** Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. Vô số. B. 5. C. 6. D. 7.
- Câu 15:** Biết phương trình $3x^2 - 4x - 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 > x_2$ khi đó biểu thức $\frac{x_1}{x_2}$ có giá trị.
- A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$. C. -5 . D. 5.
- Câu 16:** Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. Khi đó tích $x_1 x_2$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. -5. D. 5.

Câu 17: Phương trình nào sau đây có nghiệm là $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

- A. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. B. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.
C. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. D. $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

Câu 18: Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị là

- A. $\frac{29}{2}$. B. 29. C. $\frac{29}{4}$. D. $\frac{25}{4}$.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 - m = 0$, với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $5(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = -5$.
C. $m = -4$. D. Không có giá trị nào.

Câu 20: Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

- A. 13 tuổi. B. 14 tuổi. C. 15 tuổi. D. 16 tuổi.

Câu 21: Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

- A. 100 m^2 . B. 70 m^2 . C. 50 m^2 . D. 55 m^2 .

Câu 22: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

- A. 40 km. B. 70 km. C. 50 km. D. 60 km.

Câu 23: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

- A. 16 km/h. B. 18 km/h. C. 20 km/h. D. 15 km/h.

Câu 24: Một hình chữ nhật có chu vi 278 m, nếu giảm chiều dài 21 m và tăng chiều rộng 10 m thì diện tích tăng 715 m^2 . Chiều dài hình chữ nhật là

- A. 132 m. B. 124 m. C. 228 m. D. 114 m.

Câu 25: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là 5400 cm^2 , diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2 . Chu vi hình chữ nhật là

- A. 300 cm. B. 250 cm. C. 350 cm. D. 400 cm.

Câu 26: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài chiều dài của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

- A. 25 m. B. 15 m. C. 5 m. D. 20 m.

Câu 27: Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy, mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại nhưng vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

- A. 13 sản phẩm/giờ. B. 12 sản phẩm/giờ. C. 10 sản phẩm/giờ. D. 11 sản phẩm/giờ

TỰ LUẬN

Câu 1: Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$) ? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

a) $y = x^2$.

b) $y = -3x^2$.

c) $y = \frac{4x^2}{9}$.

d) $y = \frac{2}{x^2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 4x^2$ ($a \neq 0$). Tính giá trị của y khi:

a) $x = 0$;

b) $x = 2$;

c) $x = -2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Xác định a biết rằng $f(-2) = 4$.

Câu 4: Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$ với các giá trị x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

Câu 5: Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Trên (P) lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt -2 và 1. Viết phương trình đường thẳng AB.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Câu 9: Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Câu 10: Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$; b) $B = \frac{x_1^1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

- Câu 11:** Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
- Câu 12:** Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.
- Câu 13:** Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$.
- Câu 14:** Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.
- Câu 15:** Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng là 119.
- Câu 16:** Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu năng suất tăng lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.
- Câu 17:** Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu, họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?
- Câu 18:** Một người đi xe đạp quãng đường từ A đến B dài 30km. Khi từ B về A , người đó chọn con đường khác dài hơn 6km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.
- Câu 19:** Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.
- Câu 20:** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256m². Tính các kích thước của vườn.
- Câu 21:** Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.
- Câu 22:** Một lâm trường dự định làm 75 ha rừng trong một tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI.

BÀI 22. BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ

Tần số và bảng tần số

- Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
- Bảng tần số là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

trong đó m_1 là tần số của x_1 , m_2 là tần số của x_2 , ..., m_k là tần số của x_k .

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Ví dụ 1: Để mua giày thể thao cho các bạn nam trong lớp luyện tập chuẩn bị cho giải bóng đá của trường, Huy đã thu thập cỡ giày của các bạn nam trong lớp và thu được kết quả như sau:

40, 36, 37, 36, 40, 38, 39, 38, 37, 36, 40, 39, 36, 38, 37, 38, 38, 37, 38, 38, 36

- Bạn Huy cần mua giày các cỡ nào? Mỗi loại bao nhiêu đôi?
- Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, cho biết cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Lời giải

a) Bạn Huy cần mua giày với các cỡ 36, 37, 38, 39, 40. Giày cỡ 36 cần 5 đôi; cỡ 37 cần 4 đôi; cỡ 38 cần 8 đôi; cỡ 39 cần 2 đôi; cỡ 40 cần 3 đôi.

b) Bảng tần số

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	5	4	8	2	3

Giày cỡ 38 phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Nhận xét. Trong bảng tần số, ta chỉ liệt kê các giá trị x_i khác nhau. Các giá trị x_i này có thể không là số.

Tần số của một giá trị cho biết giá trị đó xuất hiện trong mẫu dữ liệu nhiều hay ít, từ đó ta dễ dàng xác định được giá trị xuất hiện nhiều nhất, ít nhất.

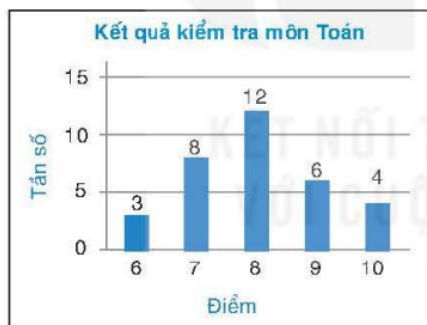
2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Tìm hiểu về biểu đồ tần số

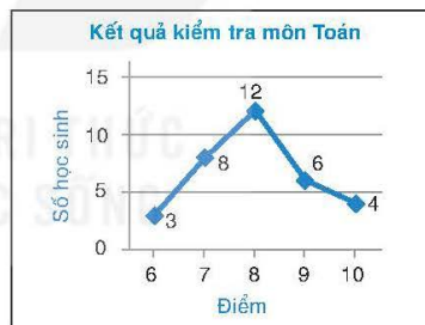
Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột

(H.7.1) và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.2).

Lưu ý: Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequency polygon).



Hình 7.1. Biểu đồ A



Hình 7.2. Biểu đồ B

Nhận xét. Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

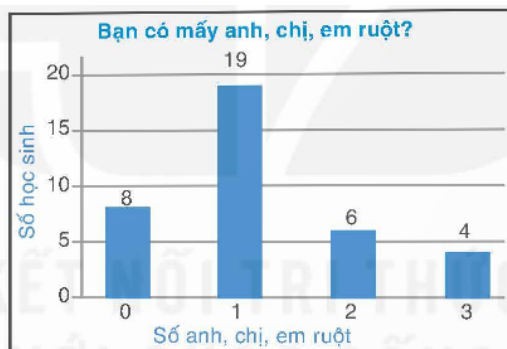
Ví dụ 2 Bạn Bình thống kê số anh, chị, em ruột của các bạn trong lớp và thu được bảng sau:

Số anh, chị, em ruột	0	1	2	3
Số bạn	8	19	6	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Lời giải

- Vẽ biểu đồ tần số dạng cột (H.7.3).



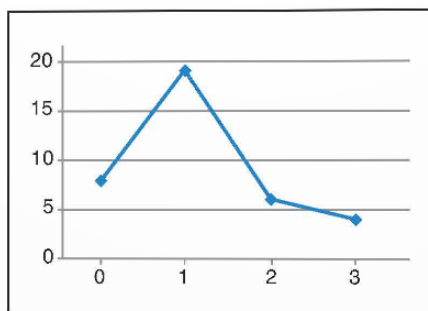
Hình 7.3

- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

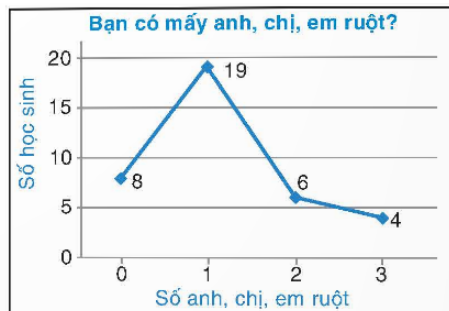
Bước 1. Vẽ các trục (H.7.4).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.4).

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ (H.7.5).



Hình 7.4



Hình 7.5

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Lập bảng tần số

Ví dụ 1. Một đội bóng đã thi đấu 26 trận trong một mùa giải. Số bàn thắng mà đội đó ghi được trong từng trận đấu được thống kê lại như sau:

2	3	2	3	3	1	0	3	1	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	0	5	4	2	0	2	0

Mẫu dữ liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau? Xác định tần số của mỗi giá trị và lập bảng tần số của mẫu dữ liệu.

Ví dụ 2. Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 10 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	4	5	2	3	2	5	2	1	2	1	1	2	5	1
1	1	3	2	1	1	4	1	1	4	1	2	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	3	1	2	1	3	2	2
1	4	3	2	3	1	3	5	1	2	3	5	1	2	1

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 3. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 4 / 2023 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 4. Bảng sau đây ghi lại tên các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9 E , mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau:

5	5	5	7	7	8	8	8	5	8	8	8	6	6	6	6	8	9	5	7
6	6	7	7	6	8	9	9	7	8	8	5	7	7	7	7	6	8	8	9

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ tương tự.

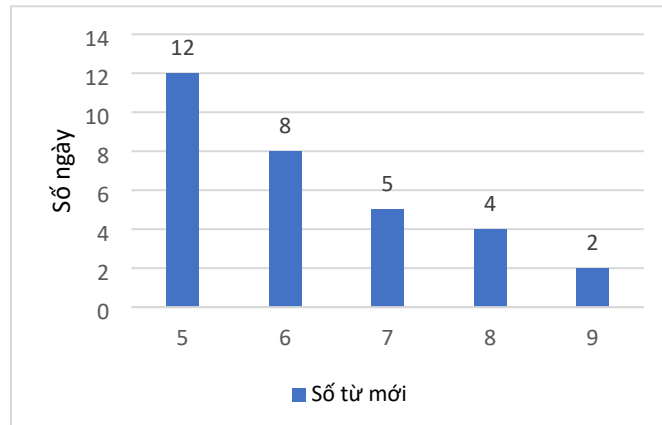
Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công sở như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Dạng 2. Biểu đồ tần số

Ví dụ 1. Vào đợt nghỉ hè vừa rồi, mỗi ngày bạn Bình đều học thêm một số từ vựng tiếng Anh mới. Số lượng từ vựng mới bạn Bình học mỗi ngày được biểu diễn ở biểu đồ cột như hình bên dưới.



a) Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mỗi giá trị đó?

b) Bạn Bình đã học từ vựng tiếng Anh mới trong bao nhiêu ngày?

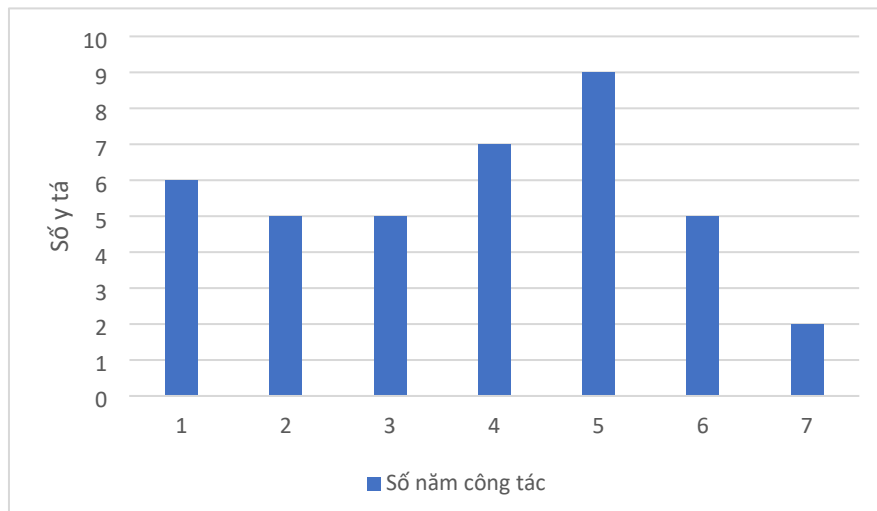
c) Có bao nhiêu ngày bạn Bình nhiều hơn 7 từ vựng mới?

Ví dụ 2. Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian (theo năm) của các y tá ở một phòng khám.

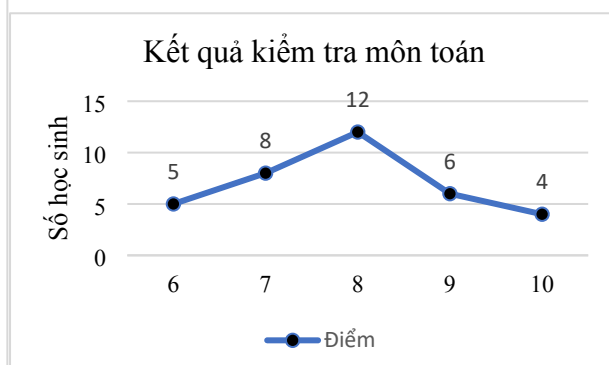
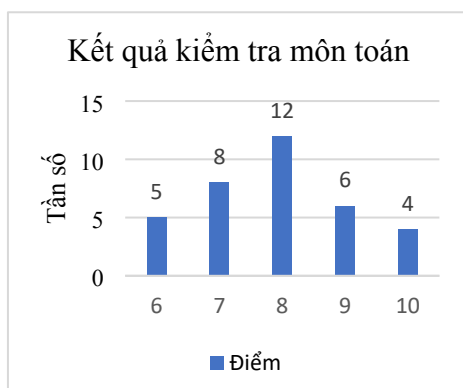
a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mọi giá trị đó.

b) Phòng khám có tổng số bao nhiêu y tá?

c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?



Ví dụ 3. Cho hai biểu đồ sau:



Biểu đồ A

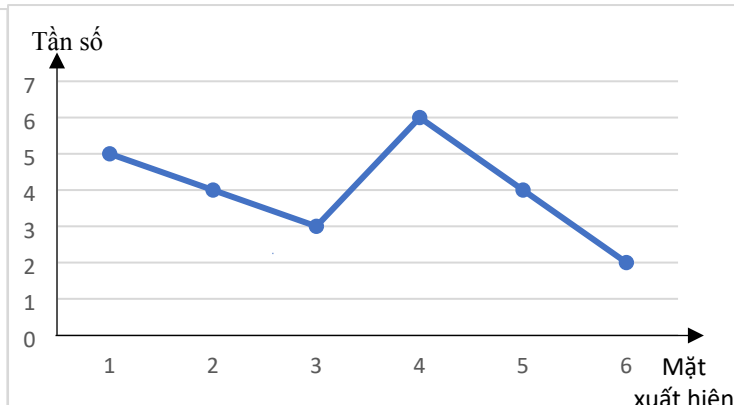
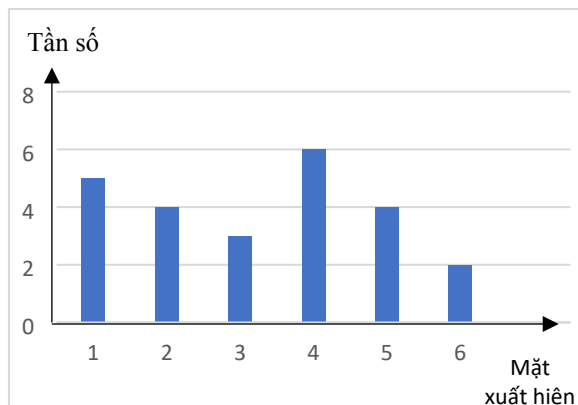
Biểu đồ B

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Ví dụ tương tự.

Lập bảng thống kê và kết quả khi gieo con xúc xắc từ biểu đồ đã cho.



Ví dụ 3. Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

Điểm	6	7	8	9	10
Số học sinh (tần số)	5	8	12	6	4

a) Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.

b) Theo biểu đồ ở câu a, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào là nhiều nhất?

Ví dụ tương tự.

Bác An thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện mỗi ngày trong tháng 7 ở bảng tần số như sau:

Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	4	5	4	5	11	7

Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn mẫu số trên.

Ví dụ 4. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9D dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

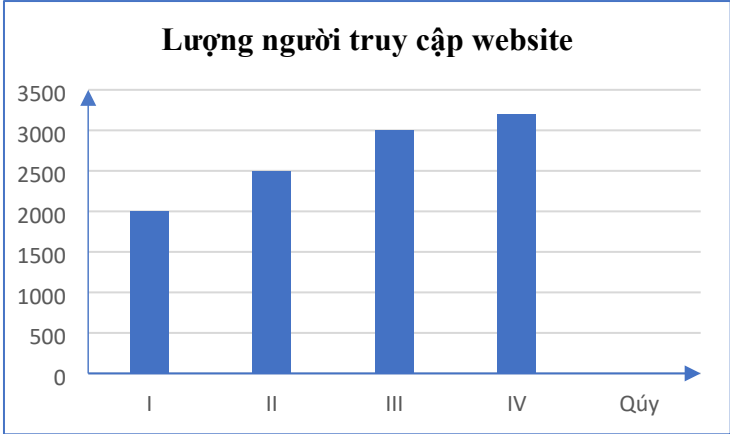
Ví dụ 5. Một công ty xuất khẩu các mặt hàng nông hải sản thống kê lại trong bảng sau số đơn đặt hàng trong mỗi năm thuộc giai đoạn 2018 -2022 :

a) Hãy chọn loại biểu đồ thuận tiện cho việc so sánh số đơn đặt hàng của các năm. Vẽ biểu đồ đó. Số đơn đặt hàng tập trung nhiều nhất vào năm nào? Số đơn đặt hàng của năm nào ít nhất?

b) Hãy chọn loại biểu đồ thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm. Vẽ biểu đồ đó. Dựa vào biểu đồ này, cho biết vào những năm nào số đơn đặt hàng giảm sút so với năm trước đó? Năm nào giảm nhiều nhất?

Ví dụ 6. Biểu đồ được đưa ra để quảng cáo cho một website.

Quan sát biểu đồ, bạn Vân nhận xét: “Lượng người truy cập quý II tăng gấp đôi so với quý I. Sang quý III, lượng người truy cập lại tăng gấp 3 so với quý I”.



Ý kiến của bạn Vân đúng không? Giải thích vì sao?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.1. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Trung bình, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

- a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.
- b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

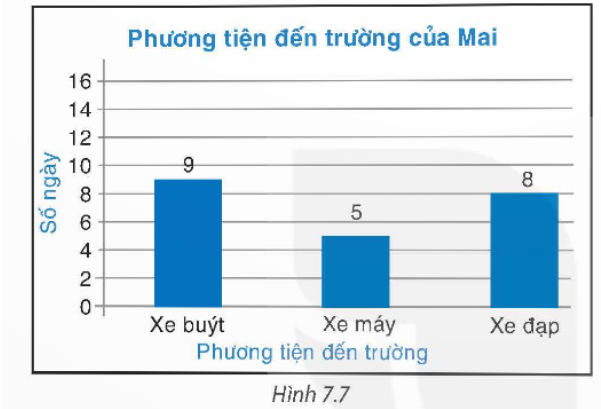
7.2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ của trường như sau:

Câu lạc bộ võ thuật	Câu lạc bộ tiếng Anh	Câu lạc bộ nghệ thuật
     	        	    

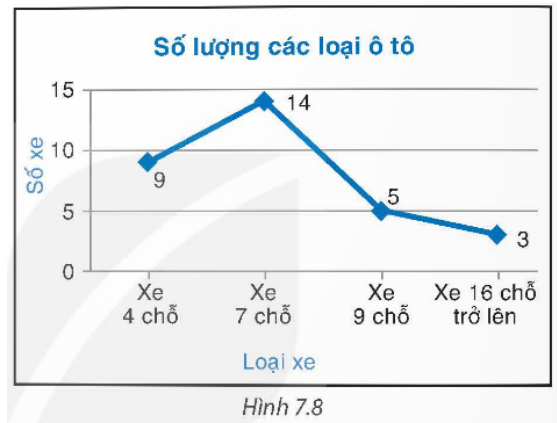
(Mỗi  biểu diễn cho 1 học sinh)

Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.3. Biểu đồ Hình 7.7 cho biết số ngày sử dụng phương tiện đến trường của bạn Mai trong tháng Chín. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.



7.4. Người ta thống kê các loại ô tô chạy qua một trạm thu phí trong 1 giờ và vẽ được biểu đồ tần số như Hình 7.8.



- a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
b) Từ bảng tần số, hãy cho biết loại xe nào đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

7.5. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990 – 2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo vietnam.opendevopmentmekong.net)

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Một công ty đã ghi lại nhóm máu của các thành viên trong công ty để chuẩn bị cho đợt hiến máu tình nguyện cho kết quả như sau: O, A, B, AB, O, O, A, O, B, A, B, B, O, O, B, O, B, O, O, O, B, A, B, O, O, O, B, O, B.

- a) Có bao nhiêu nhóm máu? Đếm số thành viên trong công ty theo từng nhóm máu.
b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, hãy cho biết nhóm máu nào phổ biến nhất.

Câu 2. (Mức 1: lưu thông bình thường; Mức 2: lưu thông khó khăn; Mức 3: lưu thông không ổn định; Mức 4: ùn tắc nghiêm trọng) vào lúc 17 giờ các ngày trong tháng Chín tại một đoạn quốc lộ:

Mức độ	Mức 1	Mức 2	Mức 3	Mức 4
Tần số	5	15	7	3

- a) Dựa vào bảng tần số, hãy cho biết mức độ ùn tắc giao thông nào là phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên.
b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số trên.

Câu 3. Tính đến hết SEA Games 32 đã có năm quốc gia từng lên ngôi vô địch bóng đá nam SEA Games, cụ thể như sau:

Đội tuyển	Năm vô địch
Thái Lan	1975, 1981, 1983, 1985, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2013, 2015, 2017
Malaysia	1961, 1977, 1979, 1989, 2009, 2011
Myanmar	1965, 1967, 1969, 1971, 1973
Việt Nam	1959, 2019, 2021

(Theo sportingnews.com)

- a) Lập bảng tần số biểu diễn số lần vô địch môn bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trên.
- b) Từ bảng tần số thu được ở câu a, hãy cho biết quốc gia nào vô địch môn Bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với mấy lần vô địch.

Câu 4. Giáo viên dạy Toán ghi lại số bài tập mỗi học sinh trong lớp đã làm sau bài học tuần trước cho kết quả như sau:

4, 2, 0, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 3
3, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 1, 4, 4, 5, 6, 2 .

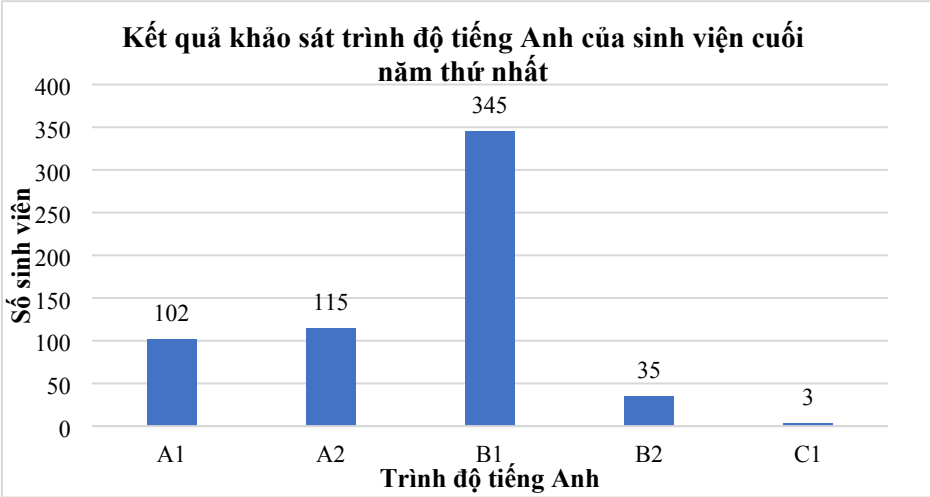
- a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.
- b) Có bao nhiêu bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập?

Câu 5. Bảng sau cho biết kết quả bình chọn môn thể thao được yêu thích nhất của các bạn học sinh lớp 9A (mỗi gạch biểu diễn cho một bạn bình chọn):

Bóng đá	
Cầu lông	
Bóng bàn	
Môn khác	

- a) Lập bảng tần số cho kết quả bình chọn trên.
- b) Dựa vào bảng tần số thu được ở câu a, cho biết môn thể thao nào được các bạn yêu thích nhất.

Câu 6. Biểu đồ sau cho biết kết quả khảo sát trình độ tiếng Anh của sinh viên cuối năm thứ nhất ở một trường đại học:



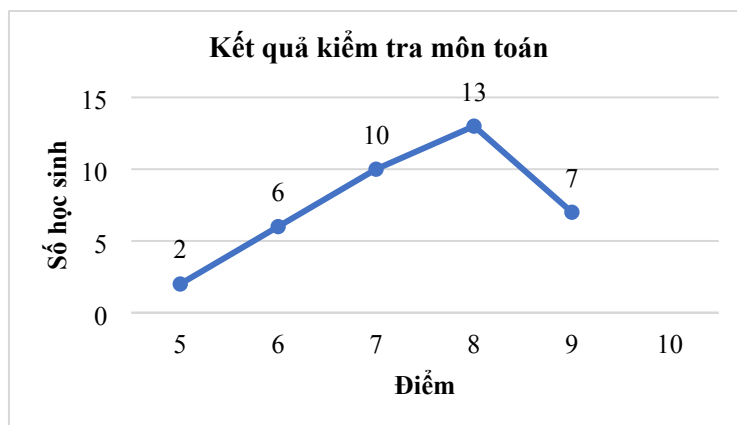
- a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên hai cột bất kì của biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- c) Để tốt nghiệp đại học, sinh viên cần có trình độ tiếng Anh ở mức B1 trở lên. Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đã đạt chuẩn trình độ tiếng Anh.

Câu 7. Số π với 50 chữ số sau dấu phẩy thập phân như sau:
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 .

- a) Lập bảng tần số cho các chữ số từ 0 đến 9 xuất hiện sau dấu phẩy thập phân.

b) Chữ số nào xuất hiện nhiều nhất, ít nhất?

Câu 8. Cho biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng sau:



a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Điểm nào có nhiều học sinh đạt nhất?

Câu 9. Một túi chứa một số viên bi có cùng kích thước, mỗi viên bi có một trong các màu đen, trắng, đỏ, vàng. Thực hiện lấy bi 20 lần, mỗi lần lấy một viên xem viên bi có màu gì sau đó trả bi lại túi, trộn đều. Kết quả trong 20 lần lấy bi có 8 lần lấy được bi đen, 4 lần lấy được bi đỏ, 6 lần lấy được bi trắng, 2 lần lấy được bi vàng.

a) Lập bảng tần số cho kết quả thu được.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

Câu 10. Thống kê số ngày nằm viện của 20 bệnh nhân được kết quả như sau:

5, 7, 4, 6, 8, 10, 6, 7, 8, 8, 6, 5, 8, 5, 4, 6, 5, 7, 4, 6

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

BÀI 23. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n .

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối.

Giá trị	x_1	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	...	f_k

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của $x_1, \dots$, $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_k

Lưu ý: Tần số tương đối còn gọi là tần suất.

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số tương đối ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số tương đối của các giá trị đó.

Ví dụ 1 Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M1, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

a) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất địa điểm này có chất lượng không khí ở mức nào?

Lời giải

a) Tổng số ngày quan sát là $n = 30$.

Số ngày có chất lượng không khí ở các mức M1, M2, M3, M4 tương ứng là $m_1 = 9, m_2 = 12, m_3 = 6, m_4 = 3$.

Do đó các tần số tương đối cho các mức M1, M2, M3, M4 lần lượt là:

$$f_1 = \frac{9}{30} \cdot 100\% = 30\%; f_2 = \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%; f_3 = \frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%; f_4 = \frac{3}{30} \cdot 100\% = 10\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số tương đối	30%	40%	20%	10%

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất là địa điểm này có chất lượng không khí ở mức M2, tức là mức Trung bình.

Nhận xét. Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối

- Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

- **Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:**

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^{\circ} \cdot f_i$ với $i = 1, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

Ví dụ 2:

Cho bảng tần số tương đối về loại phim yêu thích của các học sinh trong lớp 9A như sau:

Loại phim	Hài	Khoa học viễn tưởng	Kinh dị
Tỉ lệ bạn yêu thích	50%	37,5%	12,5%

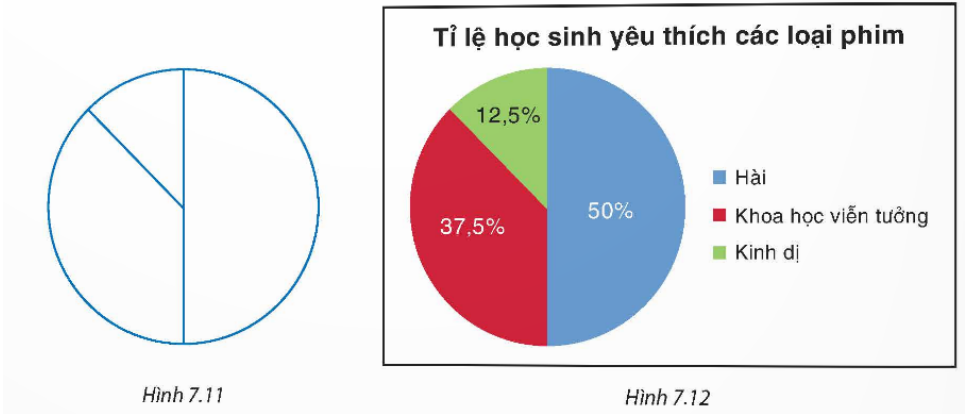
Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

Lời giải

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi loại phim:

Hài: $360^{\circ} \cdot 50\% = 180^{\circ}$; Khoa học viễn tưởng: $360^{\circ} \cdot 37,5\% = 135^{\circ}$; Kinh dị: $360^{\circ} \cdot 12,5\% = 45^{\circ}$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (H.7.11).



Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề (H.7.12).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tần số tương đối

Ví dụ 1. Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

2	5	2	2	1	3	4	0	5	2	5	1	2	1	3	5	1	0	4	1
4	2	1	4	3	3	2	0	4	5	4	5	1	4	1	1	0	3	1	4

- a) Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?
b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.

Ví dụ 2. Điều tra về “Loại nhạc cụ bạn muốn chơi nhất” đối với các bạn trong lớp, bạn Dương thu được ý kiến trả lời và ghi lại như dưới đây:

Đàn piano	Trống	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn guitar
Đàn guitar	Sáo	Đàn guitar	Đàn guitar	Đàn piano
Sáo	Đàn guitar	Sáo	Kèn harmonica	Đàn violin
Trống	Đàn guitar	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn piano
Đàn violin	Đàn piano	Đàn violin	Sáo	Trống
Kèn harmonica	Đàn violin	Đàn piano	Đàn piano	Đàn guitar

Lập bảng tần số tương đối của các loại nhạc cụ.

Hướng dẫn: Ta có thể lập bảng tần số và bảng tần số tương đối vào chung một hình vẽ.

Ví dụ 3. Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,
M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.
(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

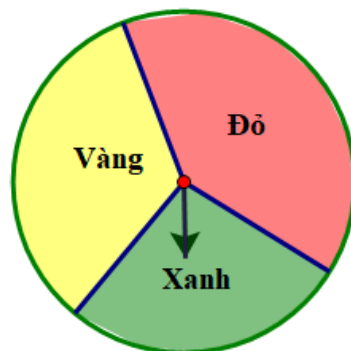
Lập bảng tần số tương đối.

Ví dụ 4. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:

Xanh: 

Đỏ: 

Vàng: 



- a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
Xanh
b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối

Ví dụ 1. Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: 1, 2, 3, 4, 5. Mẫu số liệu thống kê sau phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau:

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	5	

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Ví dụ 2. Gieo một xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

Ví dụ 3. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C (Xem Ví dụ 5 – Bài 22 . Bảng tần số và biểu đồ tần số). Vẽ biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Ví dụ 4. Câu lạc bộ mỹ thuật của nhà văn hoá thiếu nhi thống kê tuổi của các thành viên lớp hội hoạ và biểu diễn dữ liệu qua bảng sau:

Tuổi của các thành viên lớp hội hoạ

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$

- a) Tính tần số tương đối của mỗi giá trị và lập bảng tần số tương đối.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.6. Lớp 9A có 40 bạn, trong đó 20 bạn mặc áo cỡ M, 13 bạn mặc áo cỡ S, 7 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

7.7. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh lớp 9 B bình chọn phần mềm học trực tuyến được yêu thích nhất:

Skype	  
Zoom	         
Google Meet	     

(Mỗi  biểu diễn cho 2 học sinh)

Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.8. Quay 150 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	60	30	40	20

- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

- b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

7.9. Theo Tổng cục Thống kê, vào năm 2021 trong số 50,5 triệu lao động Việt Nam từ 15 tuổi trở lên có 13,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; 16,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực công nghiệp và xây dựng; 19,7 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực dịch vụ.

- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- c) Tính tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản.

7.10. Bảng thống kê sau cho biết tỉ lệ tăng trưởng GDP năm 2022 theo khu vực kinh tế.

Khu vực kinh tế	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Mức tăng trưởng	3,36%	7,78%	9,99%

(Theo Tổng cục Thống kê)

- a) Bảng thống kê trên có là bảng tần số tương đối hay không?
- b) Lựa chọn loại biểu đồ thích hợp và biểu diễn bảng thống kê trên bằng loại biểu đồ đó.

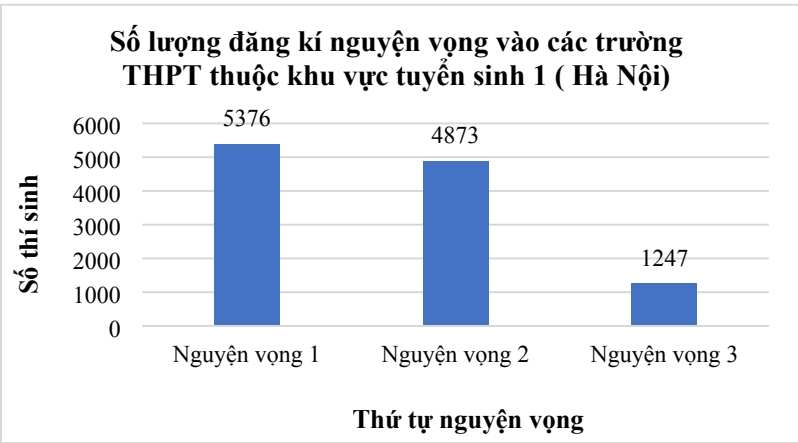
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bảng sau cho biết kết quả khảo sát về hoạt động được yêu thích nhất trong kì nghỉ hè của học sinh khối lớp 9:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Số bạn bình chọn	80	50	30	40

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

Câu 2: Biểu đồ dưới đây cho biết số lượng thí sinh đăng kí dự tuyển sinh vào lớp 10 năm 2023 tại khu vực tuyển sinh 1 của thành phố Hà Nội (gồm các trường Trung học phổ thông trên địa bàn các quận Ba Đình và Tây Hồ).



(Theo Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội)

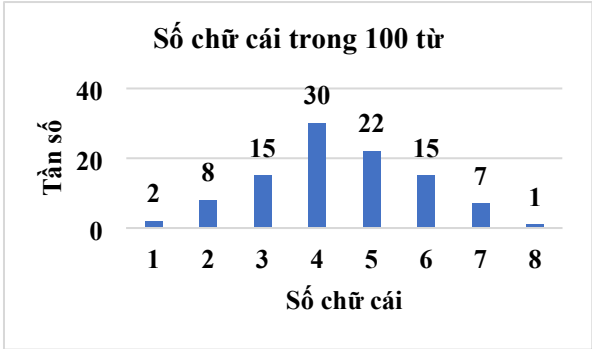
Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 3. Một xạ thủ bắn 50 lần vào bia và ghi lại điểm của 50 lần bắn như sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	15	25	7	3

- a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 khi bắn vào bia.

Câu 4. Bạn Giang chọn một đoạn văn gồm 100 từ và đếm số chữ cái trong mỗi từ của đoạn văn này cho kết quả như trong biểu đồ sau:



- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Tìm ước lượng cho xác suất một từ có nhiều hơn 5 chữ cái.

Câu 5. Kết quả bình chọn của khán giả cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất giải bóng đá học sinh trường Trung học cơ sở Chu Văn An năm học vừa qua đối với năm cầu thủ được ban tổ chức đề cử như sau:

Cầu thủ	An	Tân	Việt	Bình	Lê
Số lượng bình chọn	55	135	100	70	40

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho bảng dữ liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Câu 6. Bảng sau là kết quả đánh giá của khách hàng về chất lượng phục vụ của một lái xe công nghệ, mỗi gạch biểu diễn một lần đánh giá:

★ ★	
★ ★ ★	
★ ★ ★ ★	
★ ★ ★ ★ ★	

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống.

Câu 7. Bảng tần số tương đối sau cho biết kết quả tập luyện của một vận động viên bắn súng:

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối	5%	15%	55%	$x\%$

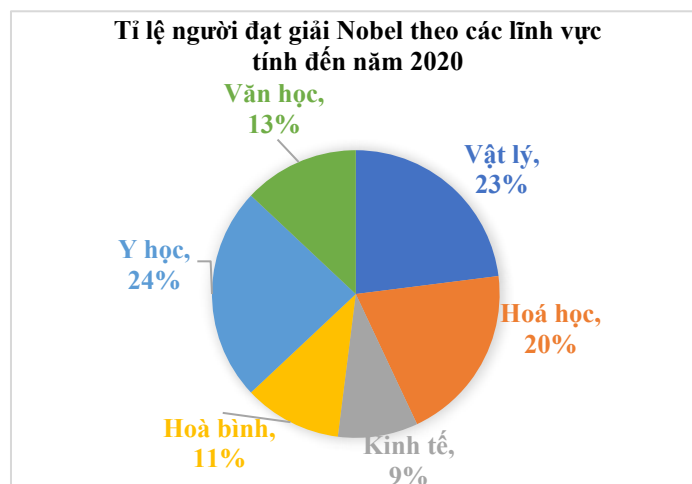
a) Xác định giá trị của x .

b) Ước lượng xác suất bắn trúng vòng 9 điểm hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

c) Biết rằng vận động viên đã bắn 200 viên đạn trong quá trình luyện tập. Tính số lần bắn trúng vòng 9 điểm

hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

Câu 8. Cho biểu đồ hình quạt tròn sau:



a) Giải thích các số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 9. Cho bảng thống kê sau về số lượng học sinh tại một trường tham gia các câu lạc bộ (CLB):

	CLB tiếng Anh	CLB Toán	CLB Khoa học	Tổng
Nam	40	60	50	150
Nữ	70	30	65	165
Tổng	110	90	115	315

a) Lập các bảng tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh nam, nữ tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ các biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Câu 10. Với số liệu cho trong bài tập 7.15, hãy:

a) Lập bảng tần số tương đối cho tỉ lệ học sinh tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

BÀI 24. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM

Tìm hiểu bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm

Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Bảng 7.3. Bảng tần số ghép nhóm

Tần số m_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1} .

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3]$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Bảng 7.4. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và

$f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1; a_2)$, ...,

$f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k; a_{k+1})$.

Ví dụ 1 Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9C cho kết quả như sau:

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163
161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163
162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165 165.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu này với các nhóm $[155; 158)$, $[158; 161)$, $[161; 164)$, $[164; 167)$.

Lời giải

Số học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là 5 học sinh; từ 158 cm đến dưới 161 cm là 12 học sinh; từ 161 cm đến dưới 164 cm là 15 học sinh; từ 164 cm đến dưới 167 cm là 8 học sinh. Do đó, tần số tương ứng với các nhóm là $m_1 = 5$, $m_2 = 12$, $m_3 = 15$, $m_4 = 8$. Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	$[150; 158)$	$[158; 161)$	$[161; 164)$	$[164; 167)$
Số học sinh	5	12	15	8

Tổng số học sinh trong lớp là $n = 5 + 12 + 15 + 8 = 40$.

Tỉ lệ học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$; từ 158 cm đến dưới 161 cm là

$\frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%$; từ 161 cm đến dưới 164 cm là $\frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%$; từ 164 cm đến dưới 167 cm là

$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[150;158)	[158;161)	[161;164)	[164;167)
Tần số tương đối	12,5%	30%	37,5%	20%

Ví dụ 2 Chỉ số chất lượng không khí (AQI) cho biết tình trạng chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng đến sức khoẻ con người. Chất lượng không khí là Tốt nếu AQI từ 0 đến dưới 50 ; là Trung bình nếu AQI từ 50 đến dưới 100 ; là Kém nếu AQI từ 100 đến dưới 150; là Xấu nếu AQI từ 150 đến dưới 200. Chất lượng không khí

tại Hà Nội từ ngày 4-2-2023 đến 5-3-2023 được cho như sau:

Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình,
Trung bình, Trung bình, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Xấu, Kém, Xấu,
Xấu, Xấu, Kém, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Kém, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu.

(Theo iqair.com)

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chỉ số AQI cho dãy dữ liệu trên.

Lời giải

Có 8 ngày chất lượng không khí ở mức Trung bình tương ứng với chỉ số AQI từ 50 đến dưới 100; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Kém tương ứng với chỉ số AQI từ 100 đến dưới 150; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Xấu tương ứng với chỉ số AQI từ 150 đến dưới 200. Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số	8	11	11

Tỉ lệ ngày có chất lượng không khí ở mức Trung bình là $\frac{8}{30} \cdot 100\% \approx 26,6\%$; ở mức Kém là

$\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$; ở mức Xấu là $\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số tương đối	26,6%	36,7%	36,7%

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM DẠNG CỘT

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

- **Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột** là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

- Biểu đồ tần số tương đối (tần số) ghép nhóm dạng cột còn gọi là tổ chức đồ (histogram).

Chú ý. Trong biểu đồ trên, nếu chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số của nhóm số liệu thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột.

Ví dụ 3: Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới

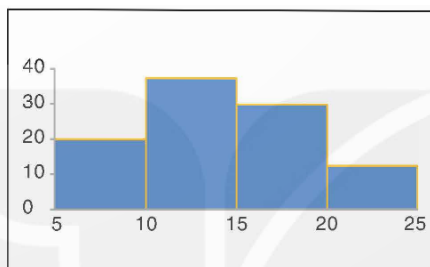
trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Lời giải

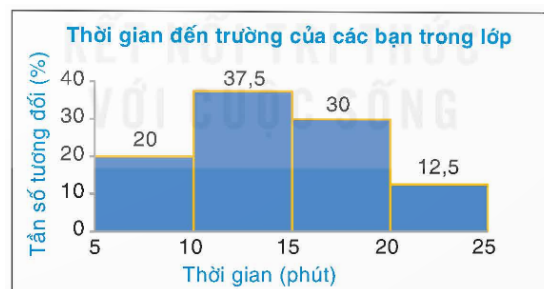
Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (H.7.18).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu (H.7.18).



Hình 7.18

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ (H.7.19).



Hình 7.19

3. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM DẠNG ĐOẠN THẲNG

Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i; a_{i+1})$ với $i = 1, 2, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i(x_i; f_i)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Chú ý. Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Ví dụ 4 Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	$[1; 1,5)$	$[1,5; 2)$	$[2; 2,5)$	$[2,5; 3)$	$[3; 3,5)$
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

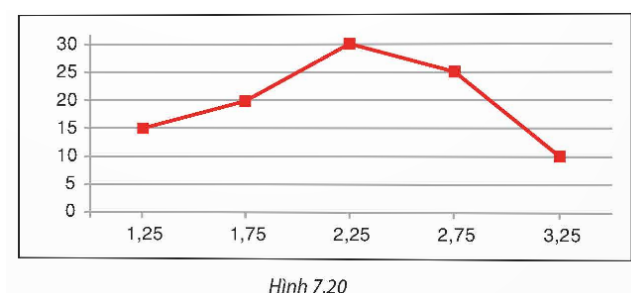
Lời giải

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

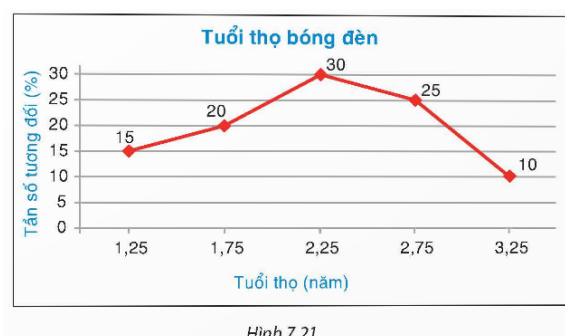
Bước 2. Vẽ các trục (H.7.20).

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.20).



Hình 7.20

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (H.7.21).



Hình 7.21

Chú ý. Trên trục ngang ta cũng có thể điền các nhóm số liệu thay cho các giá trị đại diện.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm

Ví dụ 1. Giáo viên chủ nhiệm lớp 9 C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu dưới, hãy hoàn thiện các bảng sau vào vở:

Bảng 1

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số	?	?	?	?

Bảng 2

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số tương đối	?	?	?	?

Hướng dẫn: Nhóm số liệu $[a; b)$ là nhóm gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b .

Ví dụ 2. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Tần số	12	23	15

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Ví dụ 3. Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phông cho 40 học sinh lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn: Ta có thể ghép các số liệu thành 5 nhóm, có độ dài bằng nhau.

Vì $174 < 175$, ta có: $175 - 150 = 25$ và $25 : 5 = 5 \Rightarrow [150;155), [155;160), [160;165), [165;170), [170;175)$.

Ví dụ 4. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km / h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

a) Ghép các số liệu thành 6 nhóm.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm.

Hướng dẫn:

a) Ta có số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41 ; số liệu có giá trị lớn nhất là 68 .

Ta có $40 < 41, 68 < 70$. $70 - 40 = 30; 30 : 6 = 5$

b) Xem Ví dụ 3 .

Ví dụ tương tự.

Thông kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm.

Ví dụ 5. Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành bốn nhóm theo HDI: Nhóm 1 (rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2 (cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8 ; Nhóm 3 (trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7 ; Nhóm 4 (thấp) có HDI dưới 0,55 . Năm 2021 , chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939	0,829	0,803	0,8	0,705	0,703	0,699	0,607	0,607	0,593	0,585
-------	-------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chỉ số HDI	$[0; 0,55)$	$[0,55; 0,7)$	$[0,7; 0,8)$	$[0,8; 1,0)$
Tần số				
Tần số tương đối				

Hướng dẫn: Tần số tương đối tính theo số phần trăm. Ta có: $n = 11$.

Tần số ghép nhóm của nhóm 1: $[0,8; 1,0)$ là 4. Ta có tần số tương đối ghép nhóm của nhóm 1 là:

$$\frac{4}{11} = 36\%.$$

Ví dụ 6. Bác Quảng ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

~

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

a) Lập bảng tần số ghép nhóm theo 5 nhóm: $[0; 1), [1; 2), [2; 3), [3; 4), [4; 5)$.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Ví dụ tương tự.

Cô Loan ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Ví dụ 7. Kết quả đo chiều cao của 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	155	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Theo quy định của công ty may mặc, cỡ S tương ứng với chiều cao từ 146 cm đến dưới 152 cm . Cỡ M tương ứng với chiều cao từ 152 cm đến dưới 158 cm. Cỡ L tương ứng với chiều cao từ 158 cm đến dưới 164cm . Cỡ XL tương ứng với chiều cao từ 164cm đến 170cm . Đối với 40 học sinh này, làm thế nào để xác định số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ?

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

Ví dụ 1. Thủy thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng Sáu ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Tần số (số ngày)	6	12	8	3	1

Hãy vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (tính theo tỉ lệ phần trăm).

Ví dụ tương tự.

Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới trường của một số bạn trong lớp 9D.

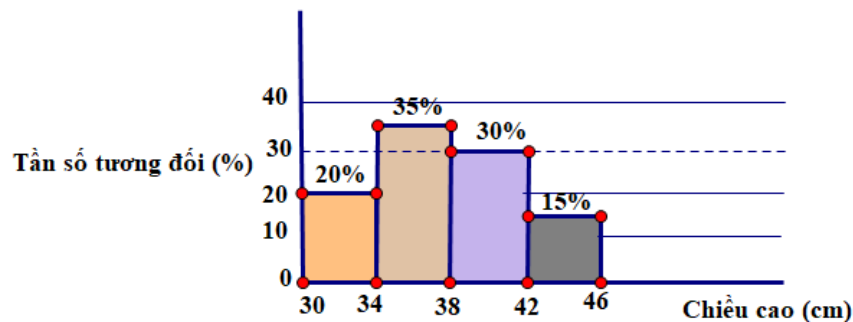
Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Quãng đường (km)	[38;42)	[42;46)
Tần số tương đối (%)	80%	20%

Lời giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Ví dụ 3. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Tần số	4	12	7	8	9

- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.

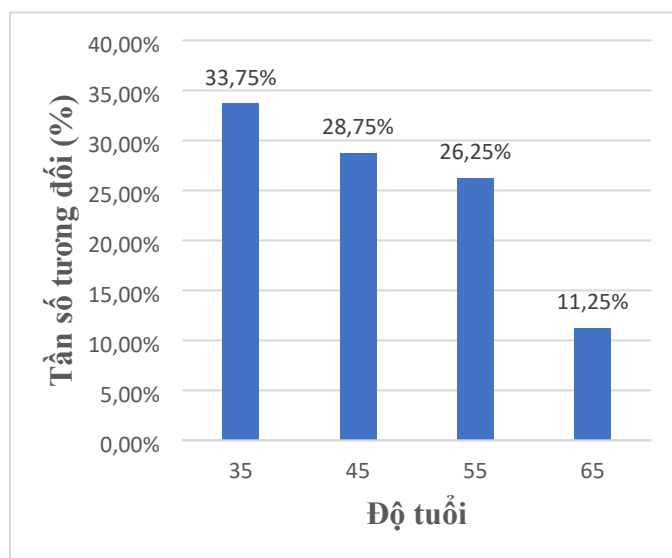
Ví dụ 4. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng biểu đồ cột.

Hướng dẫn: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm, tính theo phần trăm.

Ví dụ 5. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.

- Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.
- Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?



Hướng dẫn: Nhóm [25;35) chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Ta có: $54 : 33,75\% = 160$ (người).

Dạng 3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Ví dụ 1. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	[1;1,5)	[1,5;2)	[2;2,5)	[2,5;3)	[3;3,5)
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{1+1,5}{2} = 1,25; \frac{1,5+2}{2} = 1,75; \frac{2+2,5}{2} = 2,25; \frac{2,5+3}{2} = 2,75; \frac{3+3,5}{2} = 3,25$$

Xem phần A. Kiến thức cần nhớ.

Ví dụ 2. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của các cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường.

Chiều cao (m)	[8,5;8,7)	[8,7;8,9)	[8,9;9,1)	[9,1;9,3)	[9,3;9,5)
Tần số tương đối	15%	25%	25%	20%	15%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{8,5+8,7}{2} = 8,6; \frac{8,7+8,9}{2} = 8,8; \frac{8,9+9,1}{2} = 9,0; \frac{9,1+9,3}{2} = 9,2; \frac{9,3+9,5}{2} = 9,4$$

Ví dụ 3. Bảng dưới đây được lấy từ dữ liệu do một trọng tài ghi lại về thành tích của các vận động viên nam trong cuộc thi bơi tự do dài 50 m được một trung tâm thể dục thể thao tổ chức.

Thành tích bơi tự do 50m nam

Thời gian (giây)	[24;26)	[26;28)	[28;30)	[30;32)	[32;34)
Tần số	2	8	10	8	4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: - Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

- Chọn các giá trị đại diện cho nhóm số liệu.

- Vẽ biểu đồ.

- Tần số tương đối của nhóm [24;26) là $f_1 = \frac{2}{32} = 0,0625 = 6,25\%$.

- Tần số tương đối của nhóm [26;28) là $f_2 = \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%$.

- Tương tự với các nhóm tiếp theo: $f_3 = \frac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$.

$$f_4 = \frac{10}{32} \cdot \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%; f_5 = \frac{4}{32} = 0,125 = 12,5\%$$

Ta lập được bảng tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:

Bảng tần số tương đối ghép nhóm thành tích bơi tự do 50m nam

Thời gian (giây)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)
Tần số tương đối	6,25	25	31,25	25	12,5

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.17. Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[0; 0,5)	[0,5; 1,0)	[1,0; 1,5)	[1,5; 2,0)	[2,0; 2,5)
Tỉ lệ	15%	27%	23%	18%	17%

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 2000 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

7.18. Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3 ; cấp II và III có độ lớn từ 3 đến dưới 4 ; cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5 ; cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6 ; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Lập bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

7.19. Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9 A cho kết quả như sau:

Thời gian (giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Số học sinh	5	20	13	2

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

7.20. Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)	[19;20)	[20;21)
Số củ cà rốt	8	17	30	28	12	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

7.21. Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số cổ động viên	15	38	50	27	20	10

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được ở câu a.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Thống kê thời gian đi từ nhà đến cơ quan (đơn vị tính là phút) của 40 nhân viên một công ty được kết quả như sau:

9	12	59	47	53	5	14	32	35	40	35	10	10	4	8	20	28	23	42	44
33	39	18	20	16	25	29	27	18	17	20	23	27	29	31	41	40	40	55	50

a) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)
Tần số	?	?	?	?

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng tần số ghép nhóm thu được.

Câu 2: Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian làm bài tập về nhà trong tuần (đơn vị tính là giờ) của 40 bạn học sinh lớp 9A.

Thời gian (giờ)	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

a) Tính tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà.

b) Có bao nhiêu học sinh lớp 9 A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà?

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

Câu 3. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết cân nặng của một số con voi khi vừa sinh ra (đơn vị tính là kg):

Cân nặng (kg)	[110;115)	[115;120)	[120;125)	[125;130)
Tần số	8	15	17	10

a) Đọc và giải thích dữ liệu cho bởi bảng tần số ghép nhóm trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Câu 4. Một nhóm học sinh lớp 9B thực hiện 20 lần đo hiệu điện thế và cường độ dòng điện để xác định công suất của một chiếc quạt điện và thu được bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72;73)	[73;74)	[74;75)	[75;76)	[76;77)
Tần số tương đối	10%	20%	30%	25%	15%

a) Đọc và giải thích thông tin của hai nhóm dữ liệu cho bởi bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả 20 lần đo của nhóm học sinh.

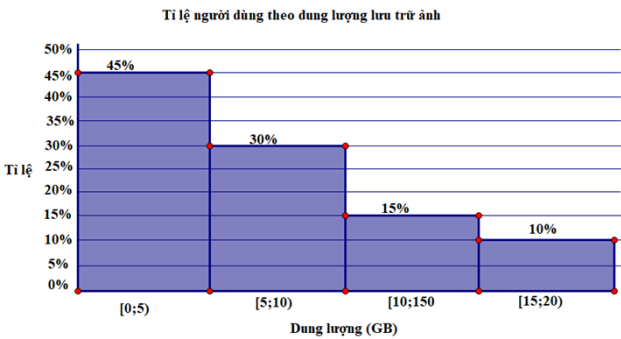
Câu 5. Một phòng khám đo và ghi lại huyết áp tâm thu (đơn vị tính là $mmHg$) của một số người đến khám bệnh thu được kết quả như sau:

118 100 107 135 127 158 179 95 127 130 135 116 182 166 164
99 112 129 134 144 158 97 175 110 99 128 134 192 149 135 90

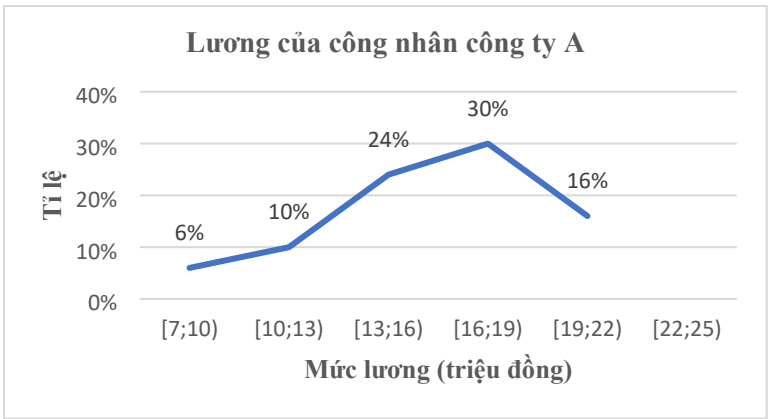
Theo Hiệp hội Tim mạch Hoa Kỳ, người bình thường có huyết áp tâm thu từ $90mmHg$ đến dưới $120mmHg$, người ở dạng tiền tăng huyết áp có huyết áp tâm thu từ $120mmHg$ đến dưới $140mmHg$; người bị tăng huyết áp có huyết áp tâm thu lớn hơn hoặc bằng $140mmHg$.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dãy số liệu trên theo các mức bệnh huyết áp.

Câu 6. Một công ty quản lý phần mềm ứng dụng trực tuyến đã thống kê tỉ lệ người dùng phần mềm này theo dung lượng bộ nhớ dành cho lưu trữ ảnh và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột như sau:



Câu 7. Cho biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng sau:



- a) Đọc và giải thích thông tin về hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- c) Biết rằng công ty A có 300 người, lập bảng tần số ghép nhóm cho lương của công nhân công ty này.

Câu 8. Bảng thống kê sau cho biết thời gian học tiếng Anh (đơn vị là năm, tính từ lúc bắt đầu học tiếng Anh đến thời điểm khảo sát) của một số học sinh lớp 9.

Thời gian (năm)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	8	12	15	10	5

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Câu 9. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết thành tích luyện tập của một vận động viên nghiệp dư chạy marathon 42 km.

Thời gian (giờ)	$[6; 6,5)$	$[6,5; 7)$	$[7; 7,5)$	$[7,5; 8)$	$[8; 8,5)$
Số lần	2	6	7	4	1

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được.

Câu 10. Kiểm tra khối lượng của một số bao xi măng trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

Khối lượng (kg)	$[48,5; 49)$	$[49; 49,5)$	$[49,5; 50)$	$[50; 50,5)$	$[50,5; 51)$
Tỉ lệ	5%	10%	35%	40%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu trên.

LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một vận động viên bắn 30 viên đạn vào bia với các điểm số thu được như sau:

10,8,9,9,10,9,9,9,8,7,10,10,9,8,7,10,9,8,7,9,9,9,10,9,10,8,9,8,8,10

- Lập bảng tần số và tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.
- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số thu được ở câu a.

Ví dụ 2 Bảng thống kê sau cho biết số lượt mượn các loại sách trong một tuần tại thư viện của một trường Trung học cơ sở.

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Số lượt	20	80	70	30

- Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.
- Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

B. BÀI TẬP

7.11. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của lớp 9B theo mức độ cận thị.

Mức độ	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Số học sinh	10	13	12	5

- Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.
- Đa số học sinh của lớp 9B cận thị hay không cận thị?

nghệ khối lớp 9 như sau:

Lớp	9 A	9 B	9 C	9 D
Tỉ lệ học sinh bình chọn	35%	25%	30%	10%

Biết rằng có 300 học sinh tham gia bình chọn. Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp.

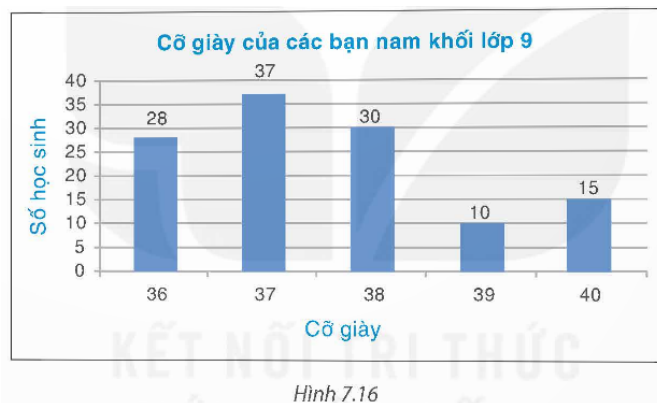
7.13. Bạn Hoàng khảo sát ý kiến của các bạn trong tổ về chất lượng phục vụ của căng tin trường thu được kết quả sau:

A, B, C, B, A, A, B, A, B, A,

trong đó A là mức Tốt, B là mức Trung bình, C là mức Kém.

Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được.

7.14. Biểu đồ cột Hình 7.16 cho biết cỡ giày của các bạn nam khối lớp 9 trong trường.



Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.15. Cho bảng tần số sau:

Điểm thi môn Toán	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	12	10	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số trên.

7.16. Theo dõi thời tiết tại một điểm du lịch trong 30 ngày người ta thu được bảng sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Số ngày	10	8	12

a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

b) Ước lượng xác suất để một ngày trời có mưa ở điểm du lịch này.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5 5 6 6 6 7 4 4 5 5 7 8 8
 9 4 5 7 4 10 7 7 7 6 6 5 7
 8 9 8 8 9 9 9 8 7 5 10 8

a) Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

c) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Bài 2. Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7 7 10 3 4 4 9 3 3 7 7 10 9 7 10 4
 12 4 3 12 9 12 9 10 7 7 12 9 7 10 10 4

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 3. Trong bài thơ "Quê hương" của tác giả Đỗ Trung Quân có hai câu thơ:

"Quê hương nếu ai không nhớ
Sẽ không lớn nổi thành người".

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái H; N; G; L lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là: H; N; G; N; H; N; G; N; H; H; N; G; L; N; N; H; N; H; N; G. Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 4. Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T
T T S Đ Đ C S S S C T T Đ D T T T C C T

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 5. Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (Bảng 23):

Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
- c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 6. Điều tra phương tiện đi lại thích nhất của hai đối tượng người lớn và thiếu niên, ta có bảng sau:

Đối tượng	Xe đạp	Ô tô	Xe buýt	Cộng
Thiếu niên	25	3	12	40
Người lớn	5	28	12	45

Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện kết quả điều tra trên.

Bài 7. Bảng dưới đây thống kê loại quả thích nhất của một số học sinh lớp 9A và lớp 9B.

Đối tượng	Táo	Cam	Chuối	Cộng
Lớp 9A	18	10	22	...
Lớp 9B	20	...	12	40
Cộng	...	18	...	90

- a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống của bảng.
- b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại quả được lớp nào thích hơn.

Bài 8. Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO - hình thức thi trực tiếp) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023 được thống kê lần lượt như sau: 159; 161; 133; 113; 148; 180; 157; 151; 151; 155; 148; 177; 150; 196; 180.

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết có bao nhiêu số liệu thống kê ở trên.

b) Trong các số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

Bài 9. Thống kê lượng hàng bán được (đơn vị: chiếc) của 39 mặt hàng ở một siêu thị điện máy như sau:

4 7 4 5 7 9 5 10 4 8 5 8 9
9 5 10 8 4 5 7 5 10 9 4 7 4
8 9 8 4 9 8 9 5 10 5 7 10 9

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 10. Bác An ghi lại số cuộc điện thoại bác đã gọi trong mỗi ngày của tháng 2 năm 2023 như sau:

5 5 8 7 8 7 9 10 10 7 7 5 9 5
10 8 8 7 9 7 5 10 8 8 10 9 7 10

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 11. Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50 38 35 38 50 38 27 38 47 27 27 35 38 32 38 32 35 32 35 32
38 38 35 32 35 38 38 50 32 47 27 38 35 27 47 35 38 38 32 35
35 35 27 32 38 35 32 32 38 32 38 35 27 38 27 38 27 32 38 38
38 32 38 32 35 27 35 38 32 27 50 32 27 35 47 32 38 27 32 32
38 27 35 38 35 47 35 38 35 38 35 35 35 35 35 27 50 38 32 38

a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 12. Điểm kiểm tra môn Toán của 200 học sinh khối 9 được thống kê như Bảng 25 sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	30	40	50	35	25	20

Bảng 25

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 13. Khối lượng thức ăn trung bình (đơn vị: gam) trong một ngày cho mỗi con lợn 50 kg của một số hộ gia đình được thống kê như sau:

2200 2100 2150 2100 2100 2150 2200 2100 2100 2050
2100 2200 2050 2050 2100 2100 2150 2200 2150 2200

2200	2050	2150	2100	2200	2200	2150	2100	2150	2100
2100	2200	2150	2150	2100	2200	2050	2100	2100	2150
2100	2100	2200	2150	2200	2050	2050	2200	2100	2150

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 14. Trong bài thơ "Lượm" nổi tiếng của nhà thơ Tố Hữu có những câu thơ:

"Chú bé loắt choắt

Cái xác xinh xinh

Cái chân thoăn thoắt

Cái đầu nghênh nghênh..."

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái C; N; H; T; L lần lượt xuất hiện trong những câu thơ trên là:

C; H; L; T; C; H; T; C; C; N; H;

N; H; C; C; H; N; T; H; N; T; H;

T; C; N; H; N; H; N; H; N; H.

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Bài 15. Bảng sau cho kết quả loại màu thích nhất đối với một số học sinh nam và nữ.

Đối tượng	Xanh lục	Xanh lơ	Màu khác
Nam	15	5	10
Nữ	3	16	6

Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện các thông tin trên.

Bài 16. Thống kê loại nhạc thích nhất của một số học sinh lớp 6 và lớp 9, kết quả được ghi ở bảng sau.

Đối tượng	Nhạc truyền thống	Nhạc hiện đại	Nhạc khác	Cộng
Lớp 6	...	13	23	...
Lớp 9	7	22	...	44
Cộng	25	...	38	98

a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống trong bảng.

b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại nhạc được lớp nào thích hơn.

ÔN TẬP CHƯƠNG V

PHẦN 1. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các bài tập từ 7.22 đến 7.24.

Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số	8	7	?	8	6	11

7.22. Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là

- A. 9 . B. 10 . C. 11 . D. 12 .

7.23. Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là

- A. 6% . B. 8% . C. 12% . D. 14% .

7.24. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể dùng loại biểu đồ nào sau đây?

- A. Biểu đồ tranh. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ cột kép.

7.25. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

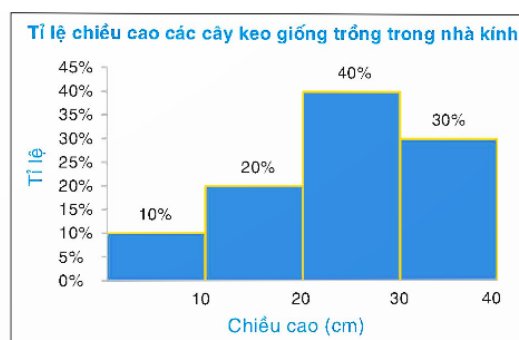
Thời gian đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	20 %	55 %	25 %

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;20)$?

- A. 10 . B. 15 . C. 20 . D. 30 .

B. TỰ LUẬN

7.26. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm Hình 7.22 cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kĩ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Hình 7.22

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.27. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời và thu được kết quả như sau:

3. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể dùng loại biểu đồ nào sau đây?

A. Biểu đồ tranh.

B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

D. Biểu đồ cột kép.

4. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

Thời gian đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;20)$?

A. 10.

B. 15.

C. 20.

D. 30.

5. Tần số xuất hiện của điểm 8 trong dãy dữ liệu trên là

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

6. Tần số tương đối của điểm 10 trong dãy dữ liệu trên là

A. 5%.

B. 10%.

C. 15%.

D. 20%.

7. Để biểu diễn số lượng học sinh theo điểm thi môn Toán đạt được thì ta không thể dùng biểu đồ nào?

A. Biểu đồ cột kép.

B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

D. Biểu đồ tranh.

8. Giá trị của x là

A. 10.

B. 15.

C. 20.

D. 25.

9. Muốn biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên ta có thể dùng biểu đồ nào sau đây?

A. Biểu đồ tần số ghép nhóm.

B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

D. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

10. Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên ta chọn giá trị nào làm giá trị đại diện cho nhóm $[2;3)$?

A. 0,5 .

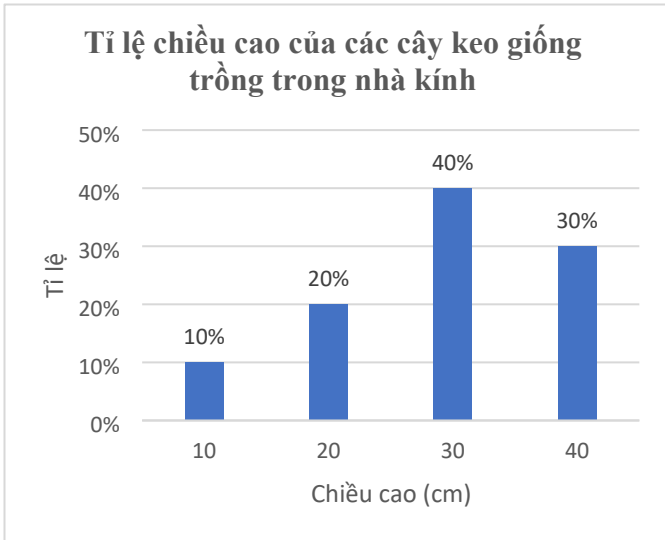
B. 1,5 .

C. 2,5 .

D. 3,5 .

B. TỰ LUẬN

Câu 1. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (hình vẽ) cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kỹ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 2. Kỹ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Số cây	5	9	4	2

- a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.
- b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài 1, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

Câu 3. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được ghi trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

- a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.
- b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Câu 4. Qua đợt khám mắt, lớp 9 A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrơ là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrơ là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrơ là cận thị nặng.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Câu 5. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số công nhân	20	50	70	40	20

- a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

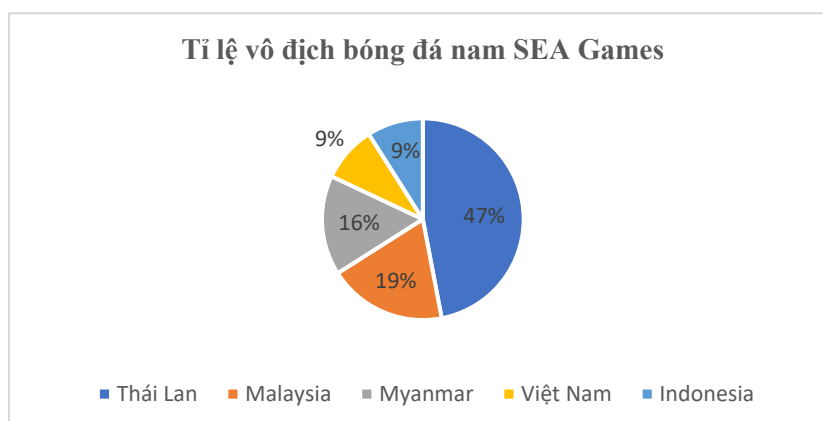
Câu 6. Kết thúc vòng tứ kết giải bóng đá của một trường Trung học cơ sở, có 4 đội lọt vào bán kết là các đội bóng lớp 9A, 9C, 8B và 7D. Ban tổ chức đã khảo sát học sinh trong trường với câu hỏi “Theo bạn, đội bóng nào sẽ vô địch?” với 4 phương án trả lời:

1. Đội bóng lớp 9A,
2. Đội bóng lớp 9C,
3. Đội bóng lớp 8B,
4. Đội bóng lớp 7D,

và thu được 500 phản hồi với 150 lựa chọn phương án 1, 200 lựa chọn phương án 2, 50 lựa chọn phương án 3 và 100 lựa chọn phương án 4.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Tìm tỉ lệ học sinh không dự đoán hai đội bóng của khối lớp 9 vô địch giải bóng đá trường.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ học sinh dự đoán mỗi đội vô địch.

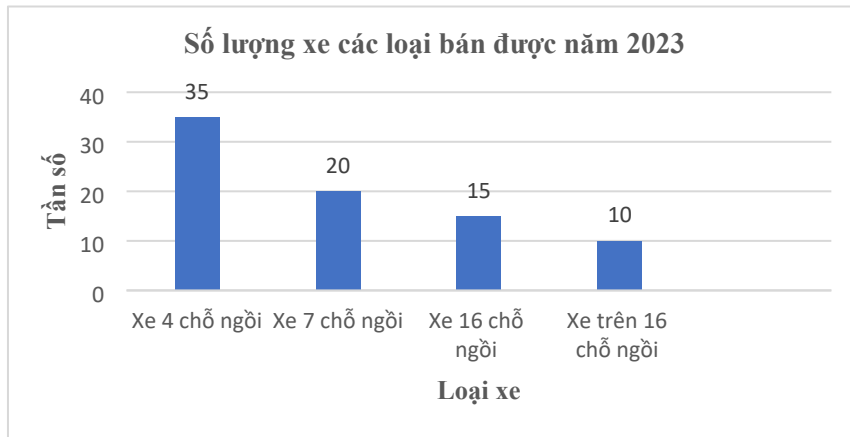
Câu 7. Biểu đồ hình quạt tròn sau đây cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các đội bóng trong khu vực tính đến năm 2023.



(Theo Liên đoàn Bóng đá Đông Nam Á)

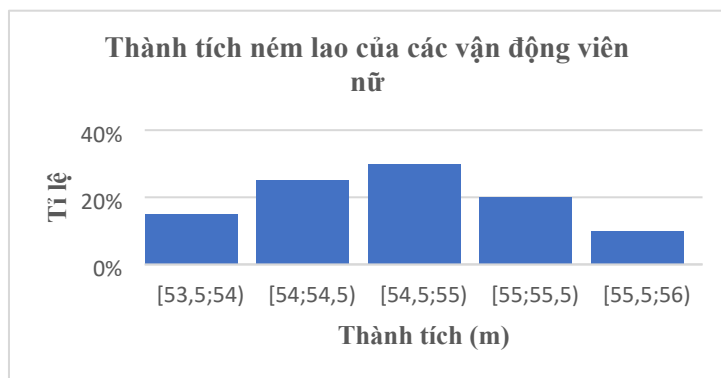
- a) Lập bảng tần số tương đối cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trong khu vực.
- b) Biết rằng tính đến năm 2023 môn Bóng đá nam đã được tổ chức ở 32 kì SEA Games. Lập bảng tần số cho số lần vô địch của các đội tuyển (làm tròn số liệu đến số nguyên gần nhất).
- c) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b.
- d) Đội tuyển quốc gia nào có số lần vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với bao nhiêu lần?

Câu 8. Biểu đồ sau cho biết số lượng các loại ô tô một cửa hàng bán được trong năm 2023:



- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- c) Giả sử tỉ lệ các loại xe bán được không đổi và cửa hàng bán được tổng số 200 ô tô các loại trong năm 2024. Hãy ước lượng số ô tô 7 chỗ cửa hàng bán được.

Câu 9. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thành tích ném lao của các vận động viên nữ tại một giải đấu:



- a) Đọc và giải thích thông tin cho hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu này.
- c) Biết rằng có 40 vận động viên nữ tham dự giải. Lập bảng tần số ghép nhóm (các tần số làm tròn đến số nguyên gần nhất).

Câu 10. Thành tích ném lao của 40 vận động viên nam trong giải thể thao trên được cho như sau:

Thành tích (m)	[70,5;71)	[71;71,5)	[71,5;72)	[72;72,5)	[72,5;73)	[73;73,5)
Số vận động viên	2	5	7	15	8	3

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.
- c) Từ biểu đồ thu được ở câu b và biểu đồ cho trong bài tập 7.28, hãy nhận xét về thành tích ném lao của các vận động viên nam và nữ.

Câu 11. Dữ liệu dưới đây cho biết cỡ giày của một nhóm 30 học sinh tại trường Trung học cơ sở C:

32 33 36 34 33 32 36 34 35 34 32 33 34 36 35
 34 34 34 34 34 35 34 35 33 34 34 34 35 33 34

- a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nhất?
- b) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường Trung học cơ sở C, hãy ước lượng xác suất để học sinh này đi giày cỡ 34 .
- c) Bảng sau quy định cỡ giày theo chiều dài của bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19;19,4)	[19,4;19,7)	[19,7;20,6)	[20,6;21,6)	[21,6;22,2)
Cỡ giày	32	33	34	35	36

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân của nhóm học sinh trên.

CHƯƠNG VIII. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

BÀI 25. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một *phép thử ngẫu nhiên*, gọi tắt là phép thử.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử (gọi tắt là tập tất cả các kết quả có thể của phép thử) được gọi là *không gian mẫu* của phép thử. Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω .

Ví dụ 1. Bạn Lan gieo một con xúc xắc và bạn Hoà gieo một đồng xu. Quan sát số chấm xuất hiện trên con xúc xắc và mặt xuất hiện của đồng xu.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử là bạn Lan gieo một con xúc xắc và bạn Hoà gieo một đồng xu. Kết quả của phép thử là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc và mặt xuất hiện của đồng xu (mặt sấp (S), mặt ngửa (N)).

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Xúc xắc \ Đồng xu	1	2	3	4	5	6
S	(1; S)	(2; S)	(3; S)	(4; S)	(5; S)	(6; S)
N	(1; N)	(2; N)	(3; N)	(4; N)	(5; N)	(6; N)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 12 ô của bảng trên. Do đó không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(1, S); (2, S); (3, S); (4, S); (5, S); (6, S); (1, N); (2, N); (3, N); (4, N); (5, N); (6, N)\}$.

Vậy không gian mẫu có 12 phần tử.

Ví dụ 2. Một hộp kín đựng 4 quả bóng có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ hộp, quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp. Quan sát hai số ghi trên hai quả bóng được lấy ra.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

a) Phép thử là lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ hộp, quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử là một cặp số (a, b) , trong đó a và b tương ứng là số ghi trên quả bóng được lấy ra ở lần thứ nhất và lần thứ hai. Vì quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp nên $a \neq b$.

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)

Chú ý rằng $a \neq b$ nên cặp có hai phần tử trùng nhau không được tính, tức là trong bảng ta phải xoá 4 ô: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) .

Do đó không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3)\}.$$

Vậy không gian mẫu có 12 phần tử.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Phép thử ngẫu nhiên

Ví dụ 1. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

- Gieo 2 khối gỗ hình lập phương, mỗi khối được sơn một màu, màu xanh và màu vàng. Quan sát màu sắc của mặt xuất hiện bên trên.
- Chọn bất kì 1 cây bút bi từ hộp có 4 cây bút bi.
- Chọn ra đồng thời 2 que gỗ từ hộp có 2 que gỗ màu xanh và que gỗ màu đỏ.

Ví dụ 2. Mỗi hành động sau có phải là phép thử ngẫu nhiên? Giải thích vì sao?

- Trên bàn có 5 phiếu giống hệt nhau. Trên 2 phiếu có vẽ hoa mai. Trên 3 phiếu còn lại vẽ hoa đào. Bạn Hà Mi lấy một phiếu bất kì và quan sát hình vẽ trên đó.
- “Đề mèn phiếu lưu kí” là quyển sách duy nhất có trên bàn. Bạn Minh Khang lấy một quyển sách trên bàn để đọc.

Ví dụ 3. Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm ba hình quạt bằng nhau, đánh số 1;2;3 và được gắn vào trục quay cố định ở tâm (xem hình).



Bạn Hiền quay tấm bìa liên tiếp hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại. Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

Ví dụ 4. Gieo một con xúc xắc một lần. Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

Ví dụ 5. Một cửa hàng muốn tặng hai phần quà cho hai trong bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất trong tháng bằng cách rút thăm ngẫu nhiên. Việc rút thăm tiến hành như sau: Nhân viên viết tên 4 khách

hàng đó vào 4 lá phiếu để vào một chiếc hộp. Nhân viên rút ngẫu nhiên một lá phiếu trong hộp. Lá phiếu rút ra không trả lại vào hộp. Sau đó, nhân viên tiếp tục rút ngẫu nhiên một lá phiếu từ ba lá phiếu còn lại. Hai khách hàng có tên trong hai lá phiếu được rút ra là hai khách hàng được tặng quà. Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

Dạng 2. Không gian mẫu. Số phần tử của không gian mẫu

Ví dụ 1. Xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên sau:

- Gieo 1 con xúc các cân đối và đồng chất hai lần.
- Lấy ra lần lượt 2 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1 ; 2 ; 3.

Ví dụ 2. Hai bạn nam Hùng, Dũng và hai bạn nữ Dung, Nguyệt tham gia đội văn nghệ của lớp 9A. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca. Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

Ví dụ 3. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số. Tìm số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

Ví dụ tương tự.

Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1000. Viết tập hợp các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra:

Ví dụ 4. Một hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 tấm thẻ từ hộp. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.

Ví dụ 5. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: màu vàng và màu xanh, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội A và allele lặn a . Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b . Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố có kiểu gene là (AA, Bb) , cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb) . Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử trên. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Gợi ý: Về kiểu gene, có hai kiểu gene ứng với màu hạt của cây con là $AA; Aa$.

Có bốn kiểu gene ứng với dạng hạt của cây con là $BB; Bb; bB; bb$.

Ví dụ 6. Trên giá sách có 4 quyển thuộc thể loại Văn học, 3 quyển thuộc thể loại Lịch sử, 2 quyển thuộc thể loại Khoa học viễn tưởng. Bạn Minh Anh rút ngẫu nhiên một quyển. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? Không gian mẫu của phép thử này gồm những phần tử nào?

Ví dụ 7. Trong hộp thứ nhất có 5 thẻ được đánh số 1,2,3,4,5. Trong hộp thứ hai có 4 chữ cái tạo thành từ TOÁN. Lấy ngẫu nhiên một thẻ trong hộp thứ nhất và một chữ cái trong hộp thứ hai. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

Ví dụ tương tự.

Xét phép thử tung một đồng xu và một con xúc xắc 6 mặt. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

8.1. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có hai con và quan sát giới tính của hai người con đó.

- Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

8.2. Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

8.3. Có hai nhóm học sinh: Nhóm I có ba học sinh nam là Huy, Sơn, Tùng; nhóm II có ba học sinh nữ là Hồng, Phương, Linh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh từ mỗi nhóm.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

8.4. Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bạn Tùng gieo một con xúc xắc và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần.

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 2. Túi I có 2 viên bi màu đen, kí hiệu là B_1, B_2 và 2 viên bi màu trắng, kí hiệu là T_1, T_2 . Túi II có 3 viên bi màu xanh, kí hiệu là X_1, X_2, X_3 và 2 viên bi màu đỏ, kí hiệu là D_1, D_2 , các viên bi có cùng kích thước. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 3. Bạn Minh gieo một đồng xu và bạn Ngọc lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ một hộp chứa 4 quả bóng với các màu xanh, đỏ, tím, vàng.

a) Phép thử là gì?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể? Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 4. Túi A chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1,2,3,4. Túi B chứa 4 viên bi với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Từ túi A rút ngẫu nhiên một tấm thẻ đồng thời từ túi B lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Phép thử là gì?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể? Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 5. Một hộp đựng 6 chiếc kẹo với các nhãn hiệu A, B, C, D, E, F . Bạn Lan lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo cho vào cặp sách của mình. Tiếp đó bạn Hồng lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo từ hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Câu 6. Một tấm bia hình tròn được chia làm năm hình quạt tròn có diện tích bằng nhau, trên mỗi hình quạt lần lượt ghi các số 1,2,3,4,5 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Bạn An quay tấm bia hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bia dừng lại.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 7. Một hộp chứa 3 quả bóng bàn và 2 quả bóng gôn. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên?

a) Chọn ra đồng thời 5 quả bóng từ hộp.

b) Chọn ra lần lượt 5 quả bóng từ hộp, bóng lấy ra không được trả lại hộp.

c) Chọn ra đồng thời 2 quả bóng gôn từ hộp.

d) Chọn ra đồng thời 2 quả bóng bàn từ hộp.

Câu 8. Một hộp đựng 4 tấm thẻ ghi các số 5; 6; 8; 9. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 tấm thẻ từ hộp. Tấm thẻ lấy ra lần đầu không được trả lại hộp.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Tích các số ghi trên hai tấm thẻ là số lẻ".

Câu 9. Một hộp chứa 2 cây bút xanh và 1 cây bút tím.

a) Liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 cây bút từ hộp.

b) Liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 cây bút từ hộp, cây bút lấy ra lần thứ nhất không được trả lại hộp trước khi lấy cây bút thứ hai.

c) Liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 cây bút từ hộp, cây bút lấy ra lần thứ nhất được trả lại hộp trước khi lấy cây bút thứ hai.

Câu 10. Hộp thứ nhất chứa 2 tấm thẻ cùng loại được đánh số 1; 2. Hộp thứ hai chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số 3; 4; 5. Bạn Hà lấy ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ hộp thứ nhất và 1 tấm thẻ từ hộp thứ hai.

a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Các số trên hai thẻ lấy ra đều là số lẻ". Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A?

Câu 11. Một nhóm học sinh gồm 2 bạn lớp 9 A là Đăng, Phước và 3 bạn lớp 9 B là Dung, Thọ và Thuý. Thầy giáo chọn ngẫu nhiên 1 học sinh lớp 9 A và 1 học sinh lớp 9B từ nhóm trên.

a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A: "Tên của hai bạn được chọn đều có chữ cái n". Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A ?

Câu 12. Peter sẽ đến thăm Thủ đô Hà Nội, Thành phố Huế và Thành phố Hồ Chí Minh trong chuyến du lịch Việt Nam của mình. Peter dự định thăm ba thành phố trên theo một thứ tự ngẫu nhiên. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Câu 13. Ba bạn Bắc, Trung, Nam vào một quán giải khát. Bắc gọi một li sinh tố bơ, Trung gọi một li sinh tố chuối và Nam gọi một li sinh tố dứa. Khi mang các li sinh tố ra, cô phục vụ đã đưa cho mỗi người một li sinh tố một cách ngẫu nhiên.

- a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?
- b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Bạn Bắc nhận đúng li sinh tố mình đã gọi".

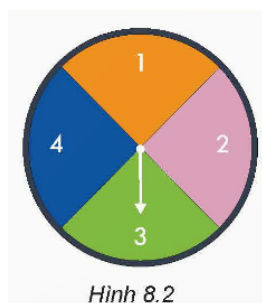
BÀI 26. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

I. KẾT QUẢ THUẬN LỢI CHO MỘT BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

Cho phép thử T . Xét biến cố E , ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của E tùy thuộc vào kết quả của phép thử T . Kết quả của phép thử T làm cho biến cố E xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho E .

Ví dụ 1. Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm bốn hình quạt bằng nhau, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (H.8.2). Bạn Tuấn quay tấm bìa hai lần, quan sát và ghi lại số của hình quạt mà mũi tên chỉ vào.



- Phép thử là gì? Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.
- Xét biến cố E : “Tổng hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 5”. Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E .
- Xét biến cố F : “Tích hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 4”. Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố F .

Lời giải

- Phép thử là quay tấm bìa hai lần. Kết quả của phép thử là một cặp số (a, b) , trong đó a và b tương ứng là số ghi trên các hình quạt mà mũi tên chỉ vào ở lần quay thứ nhất và thứ hai.

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)

Mỗi ô trong bảng là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 16 ô của bảng trên. Như vậy, không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

- Các kết quả thuận lợi cho biến cố E là $(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)$.

- Các kết quả thuận lợi cho biến cố F là $(1,4); (2,2); (4,1)$.

II. TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN ĐẾN PHÉP THỬ KHI CÁC KẾT QUẢ CỦA PHÉP THỬ ĐỒNG KHẢ NĂNG

Giả sử rằng các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Khi đó xác suất $P(E)$ của biến cố E bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và số phần tử của tập Ω : $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$, trong đó Ω là không gian mẫu của T ; $n(E)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố E và $n(\Omega)$ là số phần tử của tập Ω .

Cách tính xác suất của một biến cố

Việc tính xác suất của một biến cố E gồm các bước sau:

Bước 1. Mô tả không gian mẫu của phép thử. Từ đó xác định số phần tử của không gian mẫu Ω .

Bước 2. Chứng tỏ các kết quả có thể của phép thử là đồng khả năng.

Bước 3. Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E . Từ đó xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố E .

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E với số phần tử của không gian mẫu Ω .

Ví dụ 2. Ba bạn Bảo, Châu, Dương được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Bảo không ngồi ngoài cùng bên phải”;
- b) F: “Châu và Dương không ngồi cạnh nhau”.

Lời giải

Kí hiệu ba bạn Bảo, Châu, Dương lần lượt là B, C, D . Ta liệt kê các kết quả có thể xảy ra:

- Bảo ngồi ngoài cùng bên trái: có 2 cách xếp là BCD và BDC .
- Bảo ngồi giữa: có 2 cách xếp là CBD và DBC .
- Bảo ngồi ngoài cùng bên phải: có 2 cách xếp là CDB và DCB .

Vậy không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{BCD; BDC; CBD; DBC; CDB; DCB\}$. Tập Ω có 6 phần tử. Vì việc xếp chỗ ngồi là ngẫu nhiên nên các kết quả có thể là đồng khả năng.

- a) Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố E là BCD, BDC, CBD và DBC . Vậy $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- b) Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố F là CBD và DBC . Vậy $P(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3. Để trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu ta cần biết kiểu gene của cây bố và cây mẹ. Giả sử cây bố có kiểu gene là (AA, Bb) , cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb) . Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tính xác suất để cây con có hạt vàng và trơn.

Lời giải

Ở Bài 25, ta đã biết không gian mẫu là:

$$\Omega = \{(AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (AA, bb); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB); (Aa, bb)\}$$

Tập Ω có 8 phần tử. Phép thử có 8 kết quả có thể. Do cây con chọn ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ nên các kết quả có thể trên là đồng khả năng.

Gọi M là biến cố “Cây con có hạt vàng và trơn”. Cây con có hạt vàng và trơn nếu trong gene màu hạt có ít nhất một allele trội A và trong gene dạng hạt có ít nhất một allele trội B.

Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố M là $(AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB)$.

$$\text{Vậy } P(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Kết quả thuận lợi cho một biến cố

Ví dụ 1. Xét phép thử tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất có 6 mặt. Gọi A là biến cố “Nhận được mặt có số chấm là số nguyên tố”. Hãy liệt kê những kết quả thuận lợi cho biến cố A .

Hướng dẫn: Các kết quả thuận lợi cho biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Ví dụ 2. Bánh xe được chia thành 16 hình quạt bằng nhau, đánh số thứ tự từ 1 đến 16. Quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào hình quạt số mấy (ta nói ngắn gọn là “kim chỉ vào số mấy”). Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A : “Kim chỉ vào số là bội số của 5”;

B : “Kim chỉ vào số là ước của 14”.



Ví dụ 3. Bảng thống kê tuổi các thành viên tham gia câu lạc bộ bơi lội của một nhà văn hoá thiếu nhi.

Tuổi của các thành viên câu lạc bộ bơi lội

	10 tuổi	12 tuổi	13 tuổi	14 tuổi	Tổng số
Nam	3	5	7	15	30
Nữ	5	6	10	6	27
Tổng số	8	11	17	21	57

Lấy ngẫu nhiên một bạn trong danh sách để kiểm tra sức khoẻ. Xét các biến cố:

A : “Chọn được một bạn nữ 10 tuổi”;

B : “Chọn được một bạn nữ”;

C : “Chọn được một bạn nam 13 tuổi hoặc 14 tuổi”.

Hãy xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố A, B, C .

Ví dụ 4. Bảng biểu diễn kết quả thống kê của một bệnh viện về cân nặng của một số trẻ sơ sinh.

Cân nặng của một số trẻ sơ sinh

Cân nặng (g)	[2800;3000)	[3000;3200)	[3200;3400)	[3400;3600)	Tổng số
Tần số	4	17	10	5	36
Bé gái					

	Bé trai	3	18	8	3	32
--	---------	---	----	---	---	----

Chọn ngẫu nhiên một trẻ sơ sinh trong số này. Xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : “Chọn được một bé gái thuộc nhóm có cân nặng trong khoảng $[3200; 3400)(g)$ ”

N : “Chọn được một bé cân nặng dưới 3000 g”;

O : “Chọn được một bé trai cân nặng không dưới 3200 g”.

Ví dụ 5. Viết ngẫu nhiên một số chẵn có hai chữ số. Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố “Số tự nhiên được viết là bội của 4”.

Hướng dẫn: $\Omega = \{10; 12; \dots; 96; 98\}$. Bội của 4: 12; 16; ...; 96.

Ví dụ tương tự.

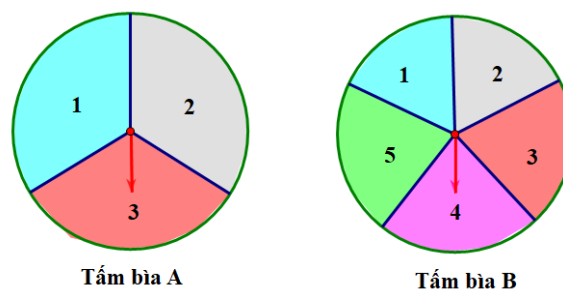
Viết ngẫu nhiên một số lẻ không vượt quá 100. Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố E : “Số tự nhiên được viết là bội của 9”.

Dạng 2. Xác suất của biến cố

Ví dụ 1. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là vàng và xanh. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội A và allele lặn a . Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b . Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cặp gene của cây con được lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố và cây mẹ có kiểu hình là “hạt vàng nhăn”. Hỏi xác suất để cây con có kiểu hình như cây bố và cây mẹ là bao nhiêu?

Ví dụ tương tự.

Ví dụ 2. Tấm bìa cứng A hình tròn được chia thành 3 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3 và tấm bìa cứng B hình tròn được chia thành 5 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4; 5. Trục quay của A và B được gắn mũi tên ở tâm. Bạn Nam quay tấm bìa A, bạn Bình quay tấm bìa B. Quan sát xem mũi tên dừng ở hình quạt nào trên hai tấm bìa. (Xem hình vẽ).



Tính xác suất của các biến cố sau:

E : “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào bằng 6”;

F : “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào nhỏ hơn 5”;

G : “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào là số chẵn”.

Hướng dẫn: Viết tập hợp Ω và các tập hợp E, F, G .

Ví dụ 3. Cho hai túi I và II, mỗi túi chứa 3 tấm thẻ được ghi các số 2; 4 ; 9. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất các biến cố sau:

- a) A : “Số tạo thành chia hết cho 4”;
- b) B : “Số tạo thành là số nguyên tố”.

Ví dụ tương tự.

Xét ba bạn An, Bình, Châu ngồi trên một dãy ghế có ba chỗ ngồi. Tính xác suất các biến cố sau:

- a) E : “An không ngồi ngoài cùng bên phải”;
- b) B : “Bình và Châu ngồi cạnh nhau”.

Hướng dẫn: Viết tập hợp các phần tử của không gian mẫu bằng cách liệt kê các kết quả.

Ví dụ 4. Tính xác suất của các biến cố sau:

E : “Trong hai bạn được chọn, có một bạn nam và một bạn nữ”;

F : “Trong hai bạn được chọn có bạn Dung”;

Hướng dẫn: Xem Ví dụ 7. Số phần tử của tập hợp Ω là 6 .

Ví dụ 5. Bạn Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng 2 quả cầu gồm một quả màu đen và một quả màu trắng, có cùng khối lượng và kích thước. Bạn Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A,B,C .

- a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.
- b) Xét các biến cố sau:

E : “Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu đen”;

F : “Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A”.

Tính $P(E); P(F)$.

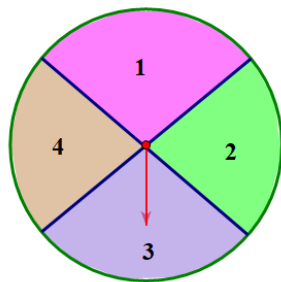
Ví dụ 6. Hộp thứ nhất đựng 1 quả bóng trắng, 1 quả bóng đỏ. Hộp thứ hai đựng 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

- a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.
- b) Biết rằng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A : “2 quả bóng lấy ra có cùng màu”;

B : “Có đúng 1 quả bóng màu đỏ trong 2 quả bóng lấy ra”.

Ví dụ 7. Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm bốn hình quạt bằng nhau, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (hình vẽ).



Bạn Tuấn quay tám bìa hai lần, quan sát và ghi lại số hình quạt mà mũi tên chỉ vào. Tính xác suất của các biến cố:

a) E : “Tổng hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 5”;

b) F : “Tích hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 4”.

Hướng dẫn: Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và các phần tử của tập hợp E , tập hợp F .

Ví dụ tương tự.

Có hai túi I và II, mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên tấm thẻ với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A : “Kết quả là một số lẻ”;

b) B : “Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố”.

Ví dụ 8. Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Linh có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố:

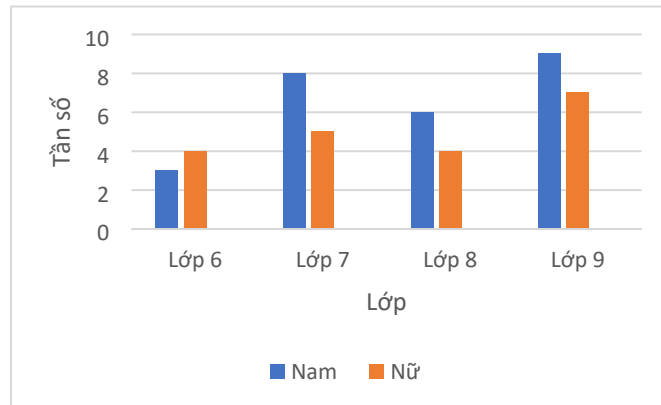
R : “Trong 2 bông hoa được chọn ra, có đúng 1 bông hoa màu đỏ”;

F : “Trong 2 bông hoa được chọn ra, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ”.

Ví dụ 9. Một hộp chứa 5 quả bóng màu đỏ và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố “Lấy được quả bóng màu đỏ” là 0,25. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng.

Ví dụ 10. Một hộp đựng 20 viên bi đỏ và xanh có cùng kích thước, khối lượng. Tìm số viên bi mỗi màu, biết rằng xác suất của biến cố A : “Lấy được bi đỏ” khi thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên một viên bi là $P(A) = 0,6$.

Ví dụ 11. Hình vẽ là biểu đồ thống kê số học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua. Lấy ngẫu nhiên một học sinh trong số này.



Tính xác suất của các biến cố:

- a) Lấy được một học sinh nữ lớp 9 .
- b) Lấy được một học sinh lớp 6.
- c) Lấy được một học sinh nam lớp 7 hoặc lớp 8.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

8.5. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có hai con. Giả thiết rằng biến cố “Sinh con trai” và biến cố “Sinh con gái” là đồng khả năng. Tính xác suất của các biến cố sau:

A : “Gia đình đó có cả con trai và con gái”;

B : “Gia đình đó có con trai”.

8.6. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất các biến cố sau:

E : “Có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm”;

F : “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm”;

G : “Tích của hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 6”.

8.7. Bạn An gieo một đồng xu cân đối và bạn Bình rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Tính xác suất của các biến cố sau:

E : “Rút được tấm thẻ ghi số lẻ”;

F : “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp”;

G : “Rút được tấm thẻ ghi số 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

8.8. Có hai túi I và II mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau:

A : “Kết quả là một số lẻ”;

B : “Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố”.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bạn Hoà gieo một con xúc xắc cân đối và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6 và hai lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa”;

b) B : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1 hoặc 2 và một lần đồng xu xuất hiện mặt sấp, một lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

Câu 2. Bạn An gieo một đồng xu. Bạn Tùng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp chứa 5 tấm thẻ có ghi chữ a, b, c, d, e . Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp và không rút được tấm thẻ ghi chữ a hoặc b”;
- b) F: “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc rút được tấm thẻ ghi chữ b”.

Câu 3. Gieo đồng thời một con xúc xắc và một đồng xu. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ”;
- b) F: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

Câu 4. Gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc trong hai lần gieo lớn hơn hoặc bằng 8.

Câu 5. Bạn Hạnh gieo một con xúc xắc và bạn Hằng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp chứa 4 tấm thẻ ghi các chữ A, B, C, D . Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6”;
- b) F: “Rút được tấm thẻ ghi chữ A hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5”.

Câu 6. Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Thịnh gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3”;
- b) F: “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3”.

Câu 7. Hai túi I và II chứa các viên bi có cùng kích thước. Túi I chứa 4 viên bi được ghi các số 1,2,3,4. Túi II chứa 5 viên bi được ghi các số 1,2,3,4,5. Bạn Mai lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi I và bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi II. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: “Hai số ghi trên hai viên bi khác nhau”;
- b) B: “Hai số ghi trên hai viên bi chênh nhau 1 đơn vị”;
- c) C: “Hai số ghi trên hai viên bi chênh nhau 3 đơn vị”.

Câu 8. Một tấm bìa hình tròn được chia làm bốn phần có diện tích bằng nhau; ghi các số 1,2,3,4 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Bạn Nam quay tấm bìa, bạn Bình gieo một con xúc xắc cân đối. Giả sử mũi tên dừng ở hình quạt ghi số m và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là n . Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Trong hai số m và n , chỉ có một số nguyên tố”;
- b) F: “Tổng của hai số m và n lớn hơn 6”.

Câu 9. Có ba chiếc hộp. Hộp A chứa 2 tấm thẻ ghi các số 1,2. Hộp B chứa 3 tấm thẻ ghi các số 1,2,3. Hộp C chứa 4 quả cầu ghi các số 1,2,3,4. Bạn Lan rút ngẫu nhiên đồng thời một tấm thẻ từ mỗi hộp A và B. Bạn Linh lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp C. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Ba số ghi trên hai tấm thẻ và quả cầu là khác nhau”;
- b) F: “Tổng ba số ghi trên hai tấm thẻ và quả cầu bằng 5”.

Câu 10. Bác Mạnh rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ bộ bài tây 52 lá. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Bác Mạnh rút được lá bài Át”;

B: "Bác Mạnh rút được lá bài chất cơ".

Câu 11. Bạn Khuê viết ngẫu nhiên một số tự nhiên chẵn có 4 chữ số lên bảng.

a) Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra của phép thử trên?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số được viết có 4 chữ số giống nhau";

B: "Số được viết lớn hơn hoặc bằng 5000".

Câu 12. Cô giáo thống kê điểm kiểm tra môn Tin học của các học sinh lớp 9A ở bảng sau:

Điểm số	7	8	9	10
Tần số tương đối	20%	40%	30%	10%

Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh lớp 9A. Biết rằng có 4 học sinh lớp 9A được 10 điểm.

a) Xác định số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của biến cố A: "Học sinh được chọn đạt trên 8 điểm".

Câu 13. Ở một trường Trung học cơ sở, tỉ lệ học sinh khối 6, 7, 8, 9 lần lượt là 28%, 25%, 25% và 22%.

Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn thuộc khối 6";

B: "Học sinh được chọn thuộc khối 7".

Câu 14. Bảng sau ghi lại điểm thi môn Tiếng Anh của 10 học sinh Tổ 1.

8	7	9	5	10	8	7	9	9	8
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

Chọn ngẫu nhiên một học sinh của Tổ 1. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn được 9 điểm";

B: "Học sinh được chọn được trên 7 điểm".

Câu 15. Kết quả kiểm tra tình trạng cân nặng của các bạn học sinh lớp 9B được thống kê lại ở bảng sau:

Tình trạng cân nặng Giới tính	Thiếu cân	Bình thường	Thừa cân
Nam	1	12	3
Nữ	4	15	1

Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của lớp 9B. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn là học sinh nữ và có cân nặng bình thường";

B: "Học sinh được chọn bị thừa cân";

C: "Học sinh được chọn là học sinh nam".

Câu 16. Bạn Bách có 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10 . Bách chọn ngẫu nhiên một tấm thẻ, xem số trên thẻ và thay số đó vào vị trí của dấu ? trong phương trình sau: $x^2 + 4x + ? = 0$ (*)

Tính xác suất của biến cố A: "Phương trình (*) có nghiệm".

Câu 17. Bác Dũng có một cái khoá số như hình bên. Bác Dũng chọn ngẫu nhiên một dãy gồm 4 chữ số để đặt làm mã số mở khoá. Tính xác suất của các biến cố:

A: "4 chữ số được chọn giống nhau";

B: "4 chữ số được chọn lập thành một số có 4 chữ số";

C: "4 chữ số được chọn có tổng bằng 35 ".

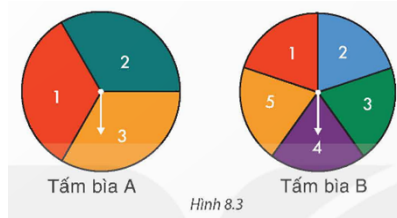


LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. Ví dụ

Ví dụ. Tấm bìa cứng A hình tròn được chia thành 3 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1 ; 2 ; 3 và tấm bìa cứng B hình tròn được chia thành 5 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1;2;3;4;5(H.8.3). Trục quay của A và B được gắn mũi tên ở tâm. Bạn Nam quay tấm bìa A , bạn Bình quay tấm bìa B . Quan sát xem mũi tên dừng ở hình quạt nào trên hai tấm bìa.



a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

c) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào bằng 6”;

F: “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào nhỏ hơn 5”;

G: “Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào là số chẵn”.

Lời giải

a) Phép thử là bạn Nam quay tấm bìa A , bạn Bình quay tấm bìa B .

b) Ta lập bảng sau:

Tấm bìa A \ Tấm bìa B	Tấm bìa A		
	1	2	3
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)

Mỗi ô trong bảng trên là một kết quả có thể. Các kết quả có thể này là đồng khả năng. Không gian mẫu là $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3); (4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2); (5,3)\}$.

Không gian mẫu có 15 phần tử.

c) Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố E là $(3,2)$ và $(2,3)$. Vậy $P(E) = \frac{2}{15}$.

- Các kết quả thuận lợi cho biến cố F : Có một ô có tích hai số bằng 1 là $(1,1)$; các ô có tích hai số bằng 2 là $(1,2)$; $(2,1)$; các ô có tích hai số bằng 3 là $(1,3)$; $(3,1)$; các ô có tích hai số bằng 4 là $(2,2)$; $(4,1)$. Do đó, có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố F là $(1,1);(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(2,2);(4,1)$. Vậy $P(F) = \frac{7}{15}$.

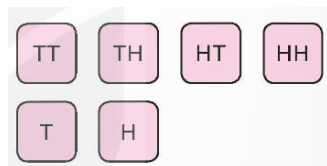
- Tích ab là số chẵn khi và chỉ khi trong cặp (a,b) có ít nhất một số chẵn.

Do đó, có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố G là $(1,2);(2,1);(2,2);(2,3);(3,2);(4,1);(4,2);(4,3);(5,2)$

$$\text{Vậy } P(G) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

B. BÀI TẬP

8.9. Có hai túi đựng các tấm thẻ. Túi I đựng 4 tấm thẻ ghi các chữ cái TT, TH, HT và HH. Túi II đựng 2 tấm thẻ ghi các chữ cái T và H . Từ mỗi túi rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ rồi ghép hai thẻ lại với nhau để được ba chữ cái, trong đó thẻ hai chữ cái đặt trước, chẳng hạn tấm thẻ TT ghép với tấm thẻ H được ba chữ cái TTH.



Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: “Trong ba chữ cái, có hai chữ H và một chữ T”;

b) F: “Trong ba chữ cái, có nhiều nhất hai chữ T”.

8.10. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

G: “Không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm”;

H: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc I là số lẻ và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc II lớn hơn 4”;

K: “Số chấm xuất hiện trên cả hai con xúc xắc lớn hơn 2”.

8.11. Trên một dãy phố có ba quán ăn A, B, C . Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn để ăn trưa.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: “Hai bạn cùng vào một quán”;

F: “Cả hai bạn không chọn quán C”;

G: “Có ít nhất một bạn chọn quán B”.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Bạn Tùng gieo một con xúc xắc và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần.

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 2. Tổ 1 gồm 4 học sinh là Trung, Hậu, Đám, Đang. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên?

- a) Chọn ra đồng thời 4 học sinh từ Tổ 1 .
- b) Chọn ra 1 học sinh có tên bắt đầu bằng chữ cái T từ Tổ 1 .
- c) Chọn ra 1 học sinh có tên bắt đầu bằng chữ cái Đ từ Tổ 1 .

Bài 3. Một hộp chứa 1 quả bóng màu xanh và 4 quả bóng màu đỏ.

- a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp.
- b) Liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng từ hộp.

Bài 4. Đội bóng bàn lớp 9 C gồm 2 bạn nam là Long và Hoàng, 2 bạn nữ là Hà và Thanh. Huấn luyện viên chọn ra ngẫu nhiên một đôi nam nữ từ đội bóng để đi thi đấu.

- a) Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên một đôi nam nữ.
- b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Có ít nhất một trong hai bạn Hoàng và Thanh được chọn".

Bài 5. Một hộp chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt là 6; 7; 8. Bạn Việt lấy lần lượt 3 tấm thẻ từ hộp một cách ngẫu nhiên. Tấm thẻ lấy ra không được trả lại hộp.

- a) Xác định không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?
- b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A: "Tám thẻ đánh số 8 được lấy cuối cùng". Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A ?

Bài 6. Bạn Hoà gieo một con xúc xắc cân đối và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6 và hai lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa”;
- b) B : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1 hoặc 2 và một lần đồng xu xuất hiện mặt sấp, một lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

Bài 7. Bạn An gieo một đồng xu. Bạn Tùng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp chứa 5 tấm thẻ có ghi chữ a, b, c, d, e . Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp và không rút được tấm thẻ ghi chữ a hoặc b”;
- b) F: “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc rút được tấm thẻ ghi chữ b”.

b) Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố F là Na, Nb, Nc, Nd, Ne, Sb . Vậy $P(F) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Bài 8. Trên bàn có một tấm bìa hình tròn được chia thành 10 hình quạt bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 10 như Hình 1. Thanh quay mũi tên ở tâm và quan sát xem khi dừng lại mũi tên chỉ vào ô số mấy.



Hình 1

a) Các kết quả của phép thử có đồng khả năng không? Tại sao?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Mũi tên chỉ vào ô ghi số chia hết cho 3";

B: "Mũi tên chỉ vào ô ghi số lớn hơn 6".

Bài 9. Trong tủ lạnh nhà bạn Minh có 6 hộp thịt gà, 4 hộp thịt heo và 10 hộp thịt bò. Các hộp này có kích thước và khối lượng bằng nhau. Vì tình nghịch nên bạn Minh đã xé hết nhãn ghi trên các hộp. Mẹ Minh chọn ngẫu nhiên

1 trong các hộp thịt trên.

a) Các kết quả của phép thử có đồng khả năng không? Tại sao?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Hộp được chọn là hộp thịt gà";

B: "Hộp được chọn không phải là hộp thịt heo".

Bài 10. Một phân xưởng cơ khí có 40 công nhân. Tỉ lệ số công nhân là thợ bậc 6; 7; 8 lần lượt là 50%, 30% và 20%. Chọn ngẫu nhiên 1 công nhân của phân xưởng.

a) Xác định số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Công nhân được chọn là thợ bậc 8";

B: "Công nhân được chọn không phải là thợ bậc 6".

Bài 11. Lớp bạn Vân có 20 học sinh nam và một số học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để bạn đó là học sinh nữ là 0,375. Hỏi lớp bạn Vân có tổng số bao nhiêu học sinh?

Bài 12. Bảng sau ghi lại kết quả khám mắt của các bạn học sinh lớp 9H.

Giới tính	Tình trạng mắt	Không bị tật khúc xạ
Nam	12	Bi tật khúc xạ
Nữ	14	9

Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh lớp 9 H. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn là học sinh nam và không bị tật khúc xạ";

B : "Học sinh được chọn là học sinh nữ";

C: "Học sinh được chọn bị tật khúc xạ".

Bài 13. Bạn Minh có 5 tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 5 . Minh chọn ngẫu nhiên 1 tấm thẻ, xem số trên thẻ và thay số đó vào vị trí của dấu ? trong phương trình sau: $x^2 + 2x + ? = 0$ (*)

Tính xác suất của biến cố A : "Phương trình (*) có nghiệm".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

8.12. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xác suất để “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10” là

- A. $\frac{7}{36}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{5}{36}$.

8.13. Có hai túi I và II. Túi I chứa 4 tấm thẻ, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Túi II chứa 5 tấm thẻ, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Xác suất để cả hai tấm thẻ rút ra đều ghi số chẵn là

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{20}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{4}{21}$.

8.14. Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ trong túi. Xác suất để tích hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 3 là

- A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{6}$.

B. TỰ LUẬN

8.15. Có hai túi I và II. Túi I chứa 3 tấm thẻ, đánh số 2 ; 3 ; 4. Túi II chứa 2 tấm thẻ, đánh số 5; 6. Từ mỗi túi I và II, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

- A : “Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị”;
B: “Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn 2 đơn vị”;
C: “Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn”;
D: “Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố”.

8.16. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

- E: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 11”;
F: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 8 hoặc 9”;
G: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 6”.

8.17. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{4; 5; 7; 8; 9; 11\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: “Bạn Minh thắng”;
b) B: “Bạn Huy thắng”.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

A. TRẮC NGHIỆM

1. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xác suất để “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10” là:

- A. $\frac{7}{36}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{5}{36}$.

2. Có hai túi I và II chứa 4 tấm thẻ, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Túi II chứa 5 tấm thẻ, đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Xác suất để hai tấm thẻ rút ra đều ghi số chẵn là:

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{20}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{4}{21}$.

3. Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1 ; 2 ; 3 ; 4. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi trong túi. Xác suất để tích hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 3 là:

- A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{6}$.

4. Có hai túi I và II. Túi I chứa ba quả cầu ghi các số 1,2,3. Túi II chứa bốn tấm thẻ ghi các số 1,2,3,4. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu và một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Xác suất của biến cố “Tích hai số ghi trên quả cầu và tấm thẻ bằng 6” là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{2}{11}$. D. $\frac{1}{4}$.

5. Hai bạn Minh và Dung mỗi người gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc như nhau là

- A. $\frac{2}{11}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

6. Bạn Sơn gieo một đồng xu cân đối và bạn Hoà gieo đồng thời hai đồng xu cân đối. Xác suất để có hai đồng xu xuất hiện mặt sấp, một đồng xu xuất hiện mặt ngửa là

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{4}{31}$.

B. TỰ LUẬN

1. Có hai túi I và II. Túi I chứa 3 tấm thẻ, đánh số 2 ; 3 ; 4. Túi II chứa 32 tấm thẻ, đánh số 5 ; 6. Từ mỗi túi I và II, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

- A: “Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị”;
B: “Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn 2 đơn vị”;
C: “Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn”;
D: “Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố”.

2. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

- E: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 11”;
F: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 8 hoặc 9”;
G: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 6”.

3. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5;6;7;8;9;11\}$ Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: “Bạn Minh thắng”;

b) B: “Bạn Huy thắng”.

4. Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 3 ; 5; 6; 7; 9. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 3”;

B: “Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ lớn hơn 13”.

5. Một chiếc hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Dung lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từng viên bi từ trong hộp cho đến khi hết bi.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “Viên bi màu xanh được lấy ra cuối cùng”;

B: “Viên bi màu trắng được lấy ra trước viên bi màu đỏ”;

C: “Viên bi lấy ra đầu tiên không phải là bi màu trắng”.

6. Túi kẹo trái cây có 60 viên, trong đó có 20 viên kẹo vị sầu riêng, 15 viên kẹo vị cam, 7 viên kẹo vị dâu, 10 viên kẹo vị chanh, 8 viên kẹo vị mít. Bạn Toàn lấy ngẫu nhiên một viên kẹo trong túi. Tính xác suất của các biến cố:

a) E: “Bạn Toàn lấy được kẹo vị sầu riêng”;

b) F: “Bạn Toàn lấy được kẹo vị cam hoặc chanh”;

c) G: “Bạn Toàn không lấy được kẹo vị dâu”.

7. Đài truyền hình điều tra ý kiến của một số khán giả về một chương trình giải trí. Kết quả điều tra được thống kê trong bảng dưới đây.

	Thích	Không thích
Nam	523	154
Nữ	147	68

Chọn ngẫu nhiên một trong số những người được điều tra. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: “Chọn được 1 khán giả nữ không thích chương trình”;

b) B: “Chọn được 1 khán giả nam”;

c) C: “Chọn được 1 khán giả thích chương trình”.

8. Bạn An gieo một con xúc xắc cân đối và bạn Bình gieo một đồng xu cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau:

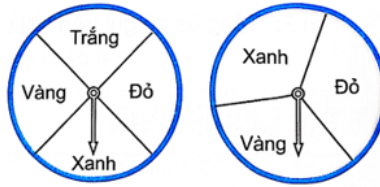
E: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6 và đồng xu xuất hiện mặt sấp”;

F: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ”;

G: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp”;

H: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa”.

9. Trong một trò chơi, có hai bánh xe, mỗi bánh xe được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm. Bánh xe thứ nhất được chia làm bốn hình quạt như nhau và sơn các màu: trắng, đỏ, xanh, vàng. Bánh xe thứ hai được chia làm ba hình quạt như nhau và sơn các màu: đỏ, xanh, vàng. Người chơi quay hai bánh xe. Người chơi đạt giải nhất nếu hai mũi tên dừng lại ở hai hình quạt màu đỏ, đạt giải nhì nếu hai mũi tên dừng lại ở hai hình quạt cùng màu và đạt giải ba nếu có đúng một mũi tên dừng ở hình quạt màu đỏ.



Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Người chơi đạt giải nhất”;
- b) F: “Người chơi đạt giải nhì”;
- c) G: “Người chơi đạt giải ba”.

10. Bạn Tuấn viết ba bức thư cho ba người bạn là An, Bình, Cường và viết tên, địa chỉ của ba người bạn đó lên ba chiếc phong bì. Xếp ngẫu nhiên ba bức thư đó vào ba phong bì.

- a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.
- b) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: “Có đúng một bức thư đúng địa chỉ”;

F: “Cả ba bức thư đúng địa chỉ”;

G: “Không có bức thư nào đúng địa chỉ”;

H: “Có ít nhất một bức thư đúng địa chỉ”.

11. Một tấm bìa hình tròn được chia làm sáu hình quạt tròn có diện tích bằng nhau; ghi các số 1,2,3,4,5,6 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Quay tấm bìa hai lần. Tính xác suất để mũi tên chỉ vào hai hình quạt tròn không đối xứng nhau qua tâm.



12. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là vàng và xanh. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội A và allele lặn a . Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là hạt trơn và hạt nhăn. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b . Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cặp gene của cây con lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ. Giả sử cả cây bố và cây mẹ có kiểu hình “Hạt vàng và trơn”. Cây bố có kiểu gene là (Aa, Bb) , cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb) . Tính xác suất để cây con có kiểu hình như cây bố và cây mẹ.

Câu 13. Tổ 2 gồm 4 bạn học sinh là My, Châu, Trọng, Thuý. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên?

- a) Chọn ra lần lượt 4 học sinh từ Tổ 2 .
- b) Chọn ra 1 học sinh có tên bắt đầu từ chữ cái M từ Tổ 2 .
- c) Chọn ra đồng thời 2 học sinh có tên bắt đầu từ chữ cái T từ Tổ 2 .

Câu 14. Trong một nhóm 10 học sinh lớp 9 có 5 bạn học trường Quang Trung; 3 bạn học trường Nguyễn Huệ và 2 bạn học trường Tây Sơn.

Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong 10 học sinh đó.

a) Không gian mẫu của phép thử có bao nhiêu phần tử?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Bạn học sinh được chọn học trường Quang Trung";

B: "Bạn học sinh được chọn không học trường Tây Sơn".

Câu 15. Một doanh nghiệp nhận thấy tỉ lệ nhân viên có quê ở Tiền Giang, Hậu Giang và Cần Thơ lần lượt là 35%, 45% và 20% . Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên của doanh nghiệp.

Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Nhân viên được chọn có quê ở Hậu Giang";

B: "Nhân viên được chọn có quê không phải ở Cần Thơ";

C: "Nhân viên được chọn có quê ở vùng Đồng bằng sông Cửu Long".

Câu 16. Bạn Minh quan tâm đến mối liên hệ giữa giới tính và màu sắc yêu thích nhất của mỗi người. Sau khi phỏng vấn tất cả 40 học sinh lớp 9 A , Minh thu được kết quả sau:

Giới tính Màu sắc	Trắng	Đen	Đỏ	Xanh
Nam	4	8	2	7
Nữ	6	3	7	3

Chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong lớp 9 A . Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Bạn được chọn là nam và yêu thích nhất màu đen";

B: "Bạn được chọn yêu thích nhất màu xanh";

C: "Bạn được chọn yêu thích nhất màu xanh hoặc màu đỏ";

D: "Bạn được chọn là nữ và có màu sắc yêu thích nhất không phải là màu đỏ".

Câu 17. Trên giá sách có 3 quyển sách Toán, Ngữ văn và Mĩ thuật được sắp xếp theo thứ tự đó. Bạn Thành lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quyển sách từ trên giá.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi và tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Có 1 quyển sách Toán trong 2 quyển sách được lấy";

B: "Không có quyển sách Mĩ thuật nào trong 2 quyển sách được lấy";

C: "Hai quyển sách được lấy được xếp cạnh nhau trên giá";

D: "Hai quyển sách được lấy đều là sách Ngữ văn".

Câu 18. Hộp thứ nhất chứa 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 5 viên bi xanh và một số viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn An chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất, bạn Thắng chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất của biến cố "Bạn An chọn được viên bi màu xanh".

b) Biết rằng xác suất bạn Thắng chọn ngẫu nhiên được viên bi màu xanh bằng xác suất bạn An chọn được viên bi màu xanh. Trong hộp thứ hai có bao nhiêu viên bi đỏ?

Câu 19. Bạn Hiền gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét biến cố A : "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số nguyên tố".

a) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A .

b) Tính xác suất của biến cố A .

CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP.

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

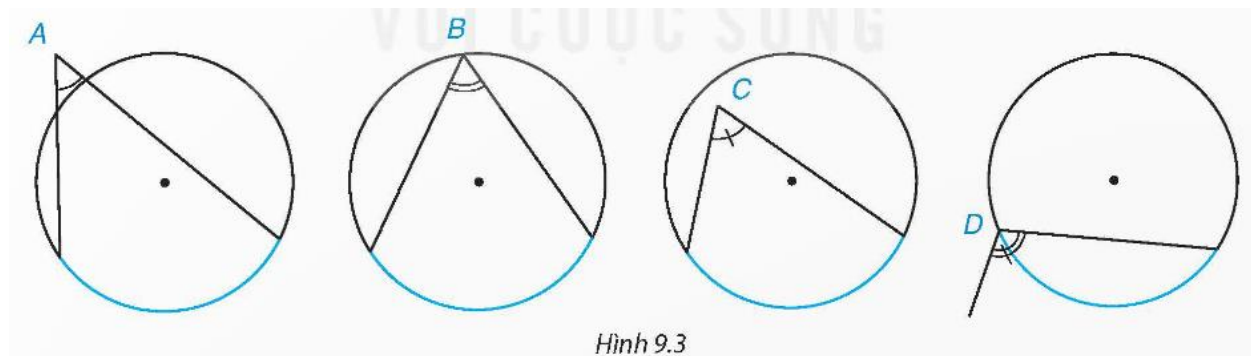
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc nội tiếp và cung bị chắn

Định nghĩa

Góc nội tiếp của đường tròn là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Ví dụ 1. Trong các góc A, B, C, D ở Hình 9.3, góc nào là góc nội tiếp, góc nào không phải góc nội tiếp của đường tròn vẽ trong hình? Vì sao?



Hình 9.3

Lời giải

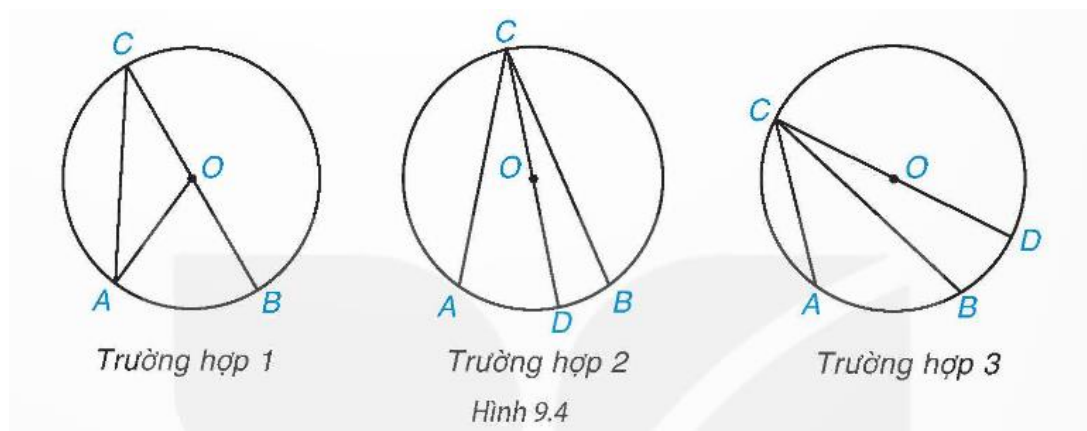
Các góc A và C không phải góc nội tiếp của đường tròn vì đỉnh không nằm trên đường tròn. Góc D có một cạnh không chứa dây cung của đường tròn nên cũng không là góc nội tiếp của đường tròn. Góc B có đỉnh B nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn nên là góc nội tiếp của đường tròn.

2. Định lý sau cho biết mối liên hệ giữa góc nội tiếp với cung bị chắn:

Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

GT	$A, B, C \in (O).$
KL	$ACB = \frac{1}{2} sđ AB$ (cung AB không chứa C).

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau (H.9.4).



Trường hợp 1: Tâm O nằm trên một cạnh của góc ACB . Giả sử $O \in CB$. Do tam giác OAC cân tại O và có tổng các góc bằng 180° nên: $2ACB = ACO + CAO = 180^\circ - AOC = AOB$.

Do $AOB = sđ AB$ (vì AOB là góc ở tâm chắn cung AB) nên $ACB = \frac{1}{2} AOB = \frac{1}{2} sđ AB$.

Trường hợp 2: Tâm O nằm bên trong góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và DCB với cạnh CD đi qua O , ta được: $ACD = \frac{1}{2} sđ AD$ và $DCB = \frac{1}{2} sđ DB$

$$\text{Suy ra } ACB = ACD + DCB = \frac{1}{2} sđ AD + \frac{1}{2} sđ DB = \frac{1}{2} sđ AB.$$

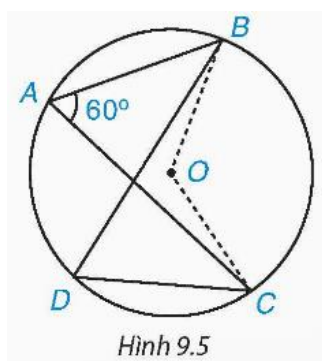
Trường hợp 3: Tâm O nằm ngoài góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và BCD với cạnh CD đi qua O , tương tự như trên ta được:

$$ACB = ACD - BCD = \frac{1}{2} sđ AD - \frac{1}{2} sđ BD = \frac{1}{2} sđ AB$$

Nhận xét. Từ định lý trên ta có các khẳng định sau đối với các góc nội tiếp của một đường tròn hoặc của hai đường tròn bằng nhau:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D trên (O) như Hình 9.5. Biết rằng $BAC = 60^\circ$, hãy tính số đo của các góc BOC và BDC .



Hình 9.5

Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

- Do hai góc nội tiếp BDC và BAC cùng chắn cung nhỏ BC nên $BDC = BAC = 60^\circ$;
- Vì góc nội tiếp BAC và góc ở tâm BOC cùng chắn cung nhỏ BC nên $BOC = 2BAC = 120^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

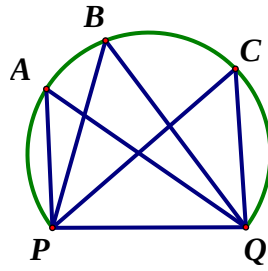
1. Phương pháp

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

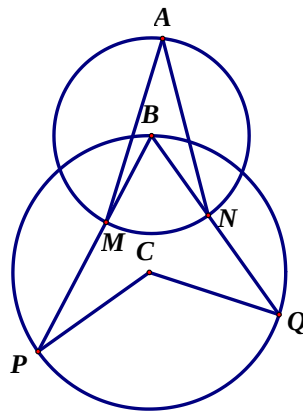
Ví dụ 1. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở các vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình 22.



Hình 22

Hãy so sánh các góc PAQ, PBQ, PCQ .

Ví dụ 2. Xem hình 24 (hai đường tròn có tâm là B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C)

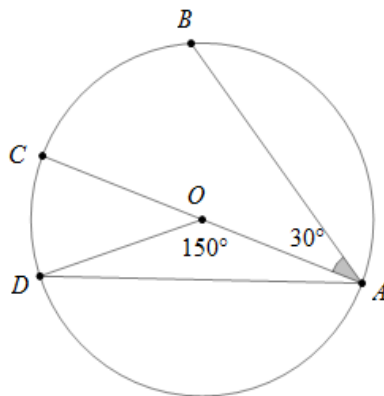


Hình 24

a) Biết $MAN = 30^\circ$. Tính PCQ .

b) Nếu $PCQ = 136^\circ$ thì MAN có số đo là bao nhiêu?

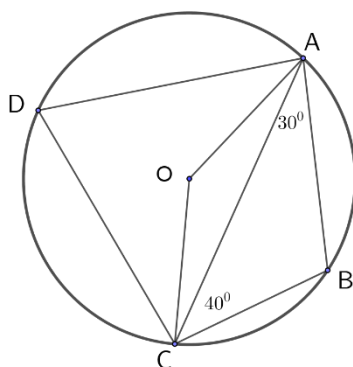
Ví dụ 3. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $BAC = 30^\circ, BCA = 40^\circ$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc ABC, ADC, AOC .

DẠNG 2. CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

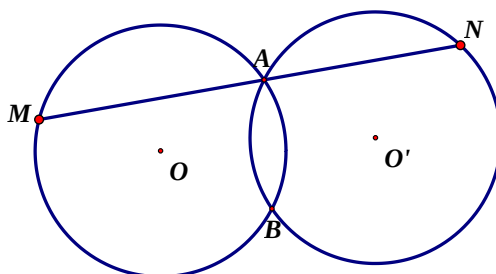
1. Phương pháp

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?



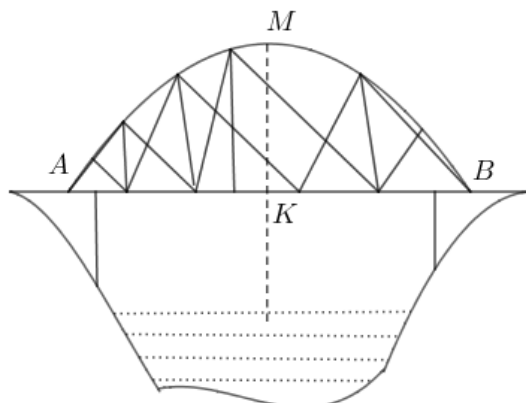
Hình 23

Ví dụ 2. Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB.MC$

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh: $MA.MB = MC.MD$

Hướng dẫn: Xét cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn. Trong mỗi trường hợp, xét hai tam giác đồng dạng.

Ví dụ 4. Một chiếc cầu được thiết kế như hình 30 có độ dài $AB = 40m$, chiều cao $MK = 3m$. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB.



Hình 30

Ví dụ 5. Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O) Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Ví dụ 6. Cho ΔABC cân tại A ($A < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $BD = DE$.

b) Chứng minh $\angle CBE = \frac{1}{2} \angle BAC$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\angle ACM$.

b) Chứng minh $\angle BAH = \angle OCA$.

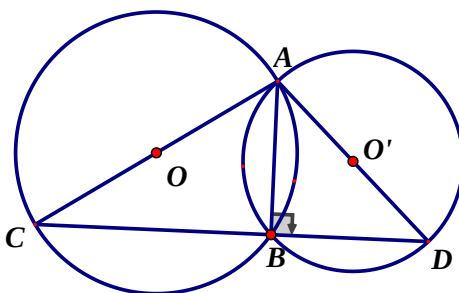
c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác BCMN là hình gì? Vì sao?

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\angle BAH = \angle OAC$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), AH là đường cao ($H \in BC$). Chứng minh rằng: $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.



Hình 26

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn, SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

a) $\triangle ABE$ là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn cùng một cung.

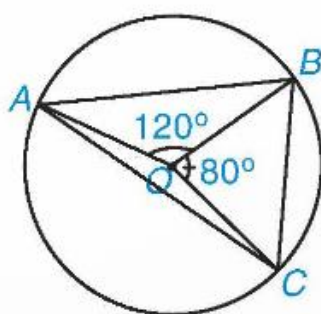
b) Góc nội tiếp nhỏ hơn 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

c) Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

d) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau.

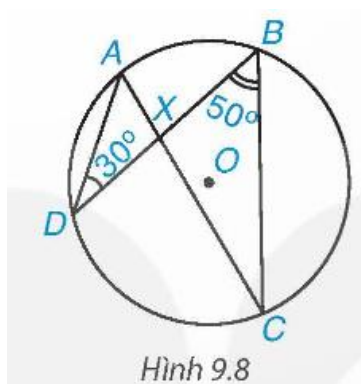
9.2. Cho các điểm như Hình 9.7. Tính số đo các góc của tam giác ABC, biết rằng

$\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 80^\circ$.



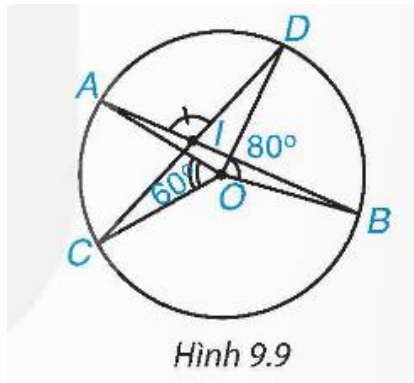
Hình 9.7

9.3. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (H.9.8). Tính số đo góc $\angle AXB$ biết rằng $\angle ADB = 30^\circ$ và $\angle DBC = 50^\circ$.



Hình 9.8

9.4. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (H.9.9)

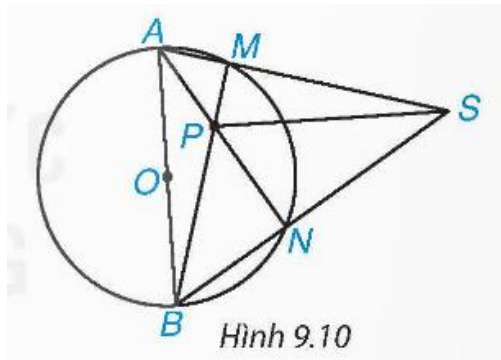


Hình 9.9

a) Biết rằng $AOC = 60^\circ$, $BOD = 80^\circ$. Tính số đo của góc AID .

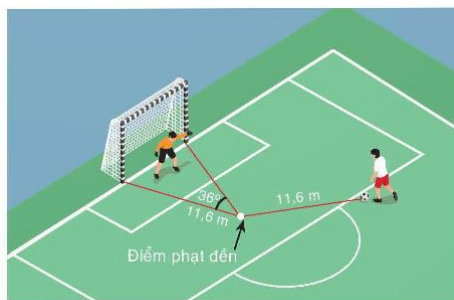
b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.5. Cho đường tròn (O) , đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O) . Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (H.9.10). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB .



Hình 9.10

9.6. Trên sân bóng, khi quả bóng được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 36° và quả bóng cách mỗi cọc gôn $11,6m$ (H.9.11). Hỏi khi quả bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền $11,6m$ thì góc sút bằng bao nhiêu?



Hình 9.11

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

a) So sánh các góc của $\triangle ABC$.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC , hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của ACB .

Bài 2. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O . Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc BAC .

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $O; R$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng $BAD = OAC$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D . Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh $DB = DC = DI$

Bài 5. Cho tam giác ABC $A = 90^\circ$ và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng $DB.CB = EB^2$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có A nhọn nội tiếp trong đường tròn $O; R$. Chứng minh rằng:
 $BC = 2R \sin BAC$.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 , đường kính AH và tâm O_2 , đường kính BH . Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng:

- a) $MH = PQ$.
- b) $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$.
- c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

- a) So sánh các góc của $\triangle ABC$;
- b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC . Hai dây AN và BM cắt nhau tại điểm I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của góc ACB .

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác DBE cân;
- b) $CBE = \frac{1}{2} BAC$

Bài 10. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường kính $MN \perp BC$ (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM , AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Bài 11. Cho đường tròn (O) và hai dây MA , MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA , MB . Gọi P là giao điểm của AK và BI .

- a) Chứng minh rằng ba điểm A , O , B thẳng hàng.
- b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.
- c*) Giả sử $MA = 12\text{cm}$, $MB = 16\text{cm}$, tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Bài 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D , đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N .

Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M , I , N thẳng hàng.
- b) $ID \perp MN$.
- c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn I nói trên.

Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

- a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $OM = \frac{1}{2} AH$

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D. Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F.

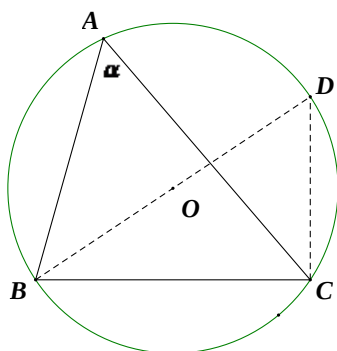
a) Chứng minh rằng tứ giác ACEM là hình thang cân.

b) Vẽ $CH \perp AB$, chứng minh rằng tia CM là phân giác của góc HCO.

c) Chứng minh rằng $CD \leq \frac{1}{2} AE$

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Biết $A = \alpha < 90^\circ$. Tính độ dài BC

Hướng dẫn giải



Hình 181

Vẽ đường kính BD , được $BCD = 90^\circ$ và $BDC = A = \alpha$.

Xét $\triangle BCD$ vuông tại C , có: $BC = BD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin \alpha$.

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2} AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

- b) Chứng minh rằng $EF \parallel MN$.
- c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.
- d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.
- e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O . Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q .

- a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng $\triangle PDB$ đều.
- b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.
- c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

BÀI 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC.

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

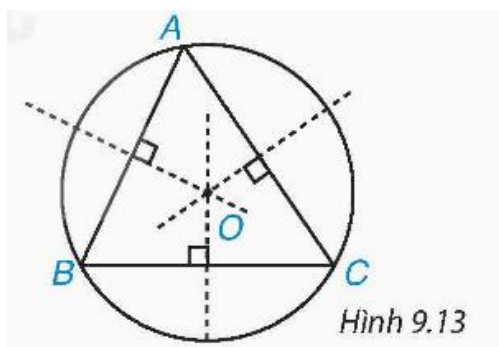
1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Khái niệm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Định nghĩa:

Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.

Trong Hình 9.13, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Ta cũng nói tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hay (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC .

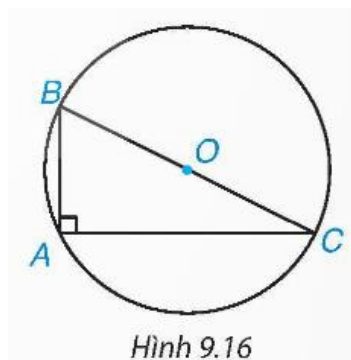


Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R .

Lời giải



Lấy O là trung điểm của BC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Khi đó, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20$ nên $BC = 2\sqrt{5}(\text{cm})$.

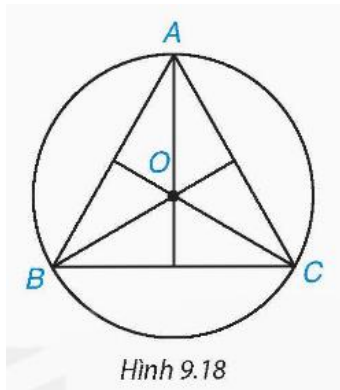
Vậy đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}\text{ cm}$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3 cm . Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính R .

Lời giải



Hình 9.18

Lấy O là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \sqrt{3} \text{ cm}$.

2. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Đường tròn nội tiếp tam giác

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

Chú ý:

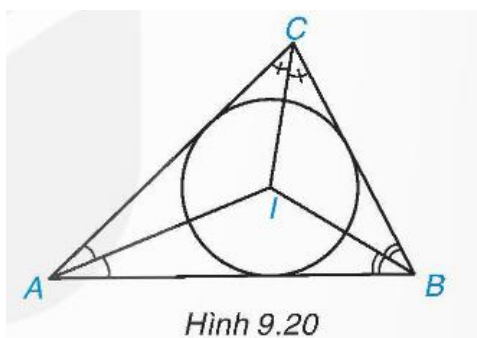
Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác nghĩa là tiếp xúc với đường thẳng chứa cạnh đó và có tiếp điểm nằm trên cạnh đó.

Đường tròn nội tiếp tam giác đều

Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6} a$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Biết rằng $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$. Tính số đo của các góc BIC , CIA và AIB .

Lời giải



Hình 9.20

Vì tổng ba góc của tam giác ABC bằng 180° nên $\hat{ACB} = 180^\circ - \hat{BAC} - \hat{ABC} = 80^\circ$.

Vì tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) nên I là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC .

Do đó, ta có: $\hat{CAI} = \hat{BAI} = \frac{\hat{BAC}}{2} = 20^\circ$; $\hat{CBI} = \hat{ABI} = \frac{\hat{ABC}}{2} = 30^\circ$; $\hat{ACI} = \hat{BCI} = \frac{\hat{ACB}}{2} = 40^\circ$. Vì tổng các

góc trong tam giác BIC bằng 180° nên $\hat{BIC} = 180^\circ - \hat{CBI} - \hat{BCI} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, $\hat{CIA} = 180^\circ - \hat{ACI} - \hat{CAI} = 120^\circ$ và $\hat{AIB} = 180^\circ - \hat{ABI} - \hat{BAI} = 130^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

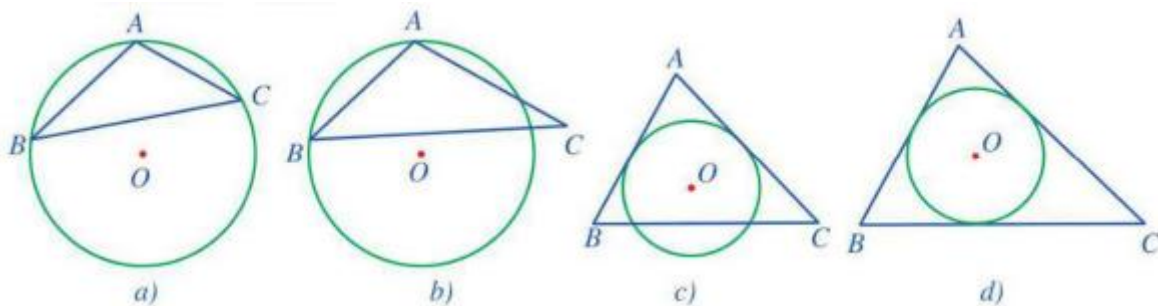
1. Phương pháp

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.

• Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC ? Giải thích ?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC ? Giải thích ?

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 10\text{cm}$ và $AC = \sqrt{21}\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$ ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Tính r

Ví dụ 4. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại B có $C = 60^\circ$, $BC = 3\text{cm}$ và O là trung điểm AC . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của:

a) $\triangle ABC$;

b) $\triangle BCO$.

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2}\text{cm}$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\angle BOC = 120^\circ$ và $\angle OCA = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

DẠNG 2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC . Chứng minh rằng AO là tia phân giác của BAC

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A $BAC = 90^\circ$ ($AB \leq AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh rằng:

a) $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD \cdot DC$

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M , đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng;

b) $AM = AN$;

c) $\angle IAK = \frac{1}{2} \angle BAD$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\angle EIF + \angle BAC = 180^\circ$.

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh:

a) $DB \perp AC$ và $CD \perp AB$;

b) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;

c) $AC^2 + BH^2 = 4R^2$;

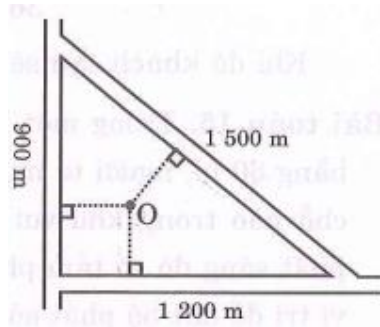
d) Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

DẠNG 3. TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1. Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 12 cm. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Ví dụ 2. Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m. Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C .

Ví dụ 3. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900 m, 1200 m và 1500 m (Hình vẽ).



a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?

Ví dụ 4. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m. Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại A và có độ dài cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ cm.

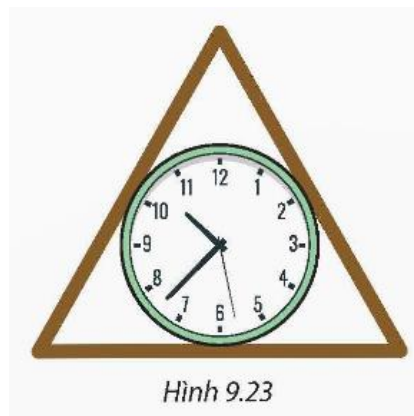
9.8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm. Tính diện tích tam giác ABC .

9.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $BAH = OAC$.

9.10. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $EIF + BAC = 180^\circ$.

9.11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1 cm.

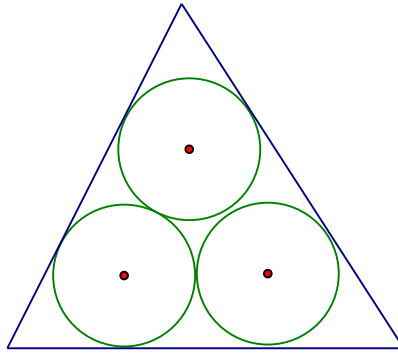
9.12. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30cm (H.9.23). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

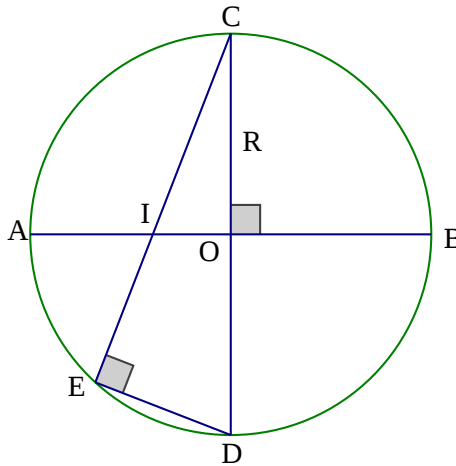
Bài 1. Một đường tròn có bán kính 3 cm. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Bài 2. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD . Trên bán kính AO lấy đoạn $AI = \frac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt (O) tại E . Tính R theo CE



Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC và BC . Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I . Tính BIF

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 7. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3cm . Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

Bài 10. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a .

Bài 11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1cm .

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\angle BAH = \angle OAC$.

Bài 13. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP.

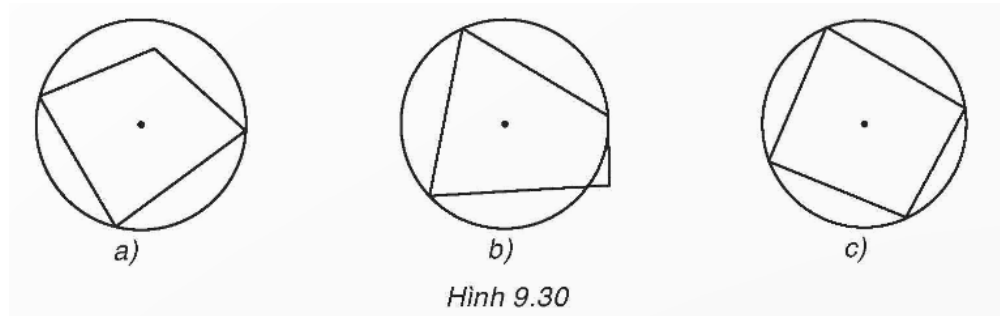
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Đường tròn ngoại tiếp một tứ giác

Đường tròn đi qua bốn đỉnh của một tứ giác

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ví dụ 1. Trong các hình sau (H.9.30), hình nào vẽ một tứ giác nội tiếp một đường tròn?



Hình 9.30

Lời giải

Hình a và b không vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì mỗi tứ giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn và đỉnh còn lại không nằm trên đường tròn.

Hình c vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.

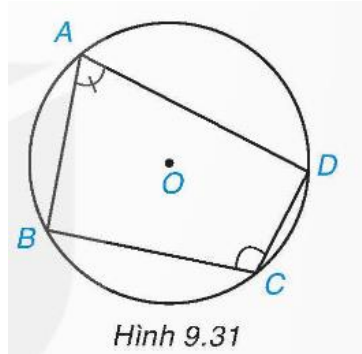
Tổng quát, chúng ta có định lý sau đây về tổng số đo các góc đối nhau của một tứ giác nội tiếp.

Định lý

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .

GT	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) .
KL	$A + C = 180^\circ; B + D = 180^\circ$.

Chứng minh



Hình 9.31

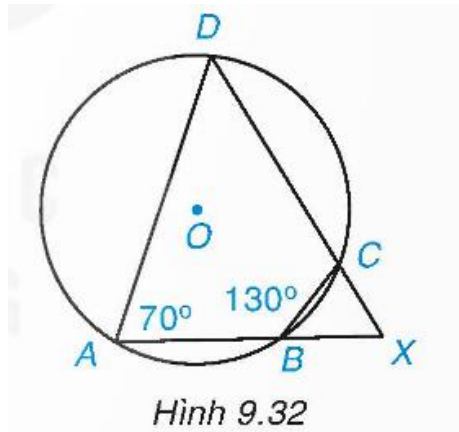
Do hai điểm B, D chia đường tròn (O) thành hai cung BCD và BAD nên $sđBCD + sđBAD = 360^\circ$.

Do $\hat{A}$ và $\hat{C}$ là các góc nội tiếp của đường tròn (O) lần lượt chắn cung BCD và BAD nên

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}sđBCD + \frac{1}{2}sđBAD = 180^\circ. \text{ Tương tự, } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.32. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X . Biết rằng $\angle DAB = 70^\circ, \angle ABC = 130^\circ$. Tính số đo của các góc BCD và BXC .

Lời giải



Hình 9.32

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

Do đó $DAB + BCD = 180^\circ$, hay $BCD = 180^\circ - DAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, ta có: $ABC + CDA = 180^\circ$, hay $CDA = 180^\circ - ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Vì tổng các góc trong tam giác AXD bằng 180° nên:

$$BXC = AXD = 180^\circ - DAB - CDA = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

2. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Ta có khẳng định sau:

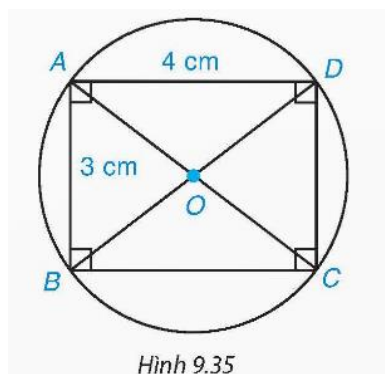
Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tính bán kính R .

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = OA$. Đường tròn $(O; R)$ vừa vẽ

tiếp hình chữ nhật $ABCD$ (H.9.35).



Hình 9.35

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABD vuông tại A , ta có:

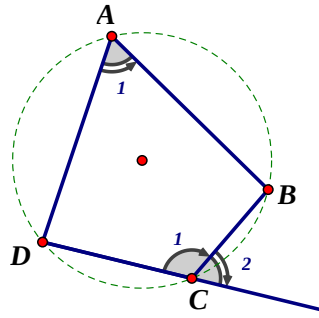
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ nên } BD = 5(\text{cm}). \text{ Do đó, ta có } R = \frac{BD}{2} = 2,5\text{cm}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

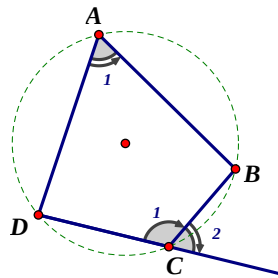
1. Phương pháp

- Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $A_1 + C_1 = 180^\circ$ và $B + D = 180^\circ$

□ Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.



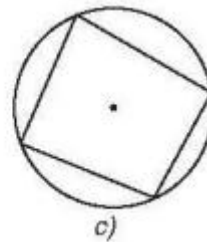
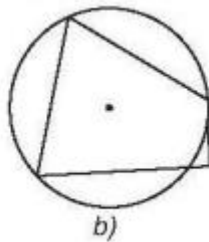
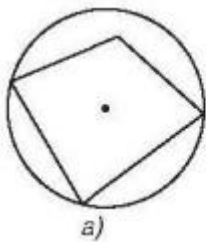
$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $A_1 + C_1 = 180^\circ$ mà $C_1 + C_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow A_1 = C_2$

Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

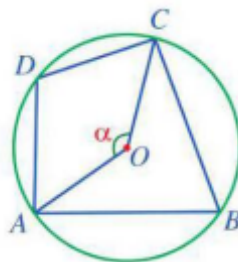
- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



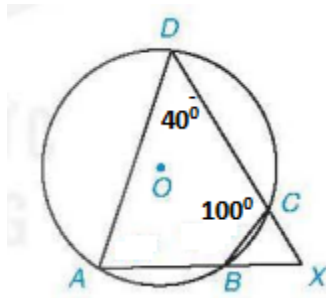
Ví dụ 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^\circ$.



a) Tính các góc ABC, ADC của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $BAD + BCD$.

Ví dụ 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $ADC = 40^\circ, BCD = 100^\circ$.



a) Tính các góc ABC, BAD của tứ giác $ABCD$.

b) Tính BXC .

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trường hợp sau:

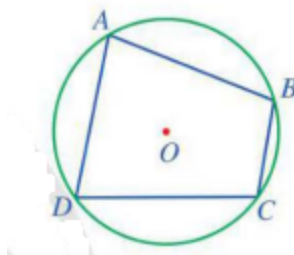
a) $A = 45^\circ$ và $B = 155^\circ$.

b) $B = 60^\circ$ và $C = 85^\circ$.

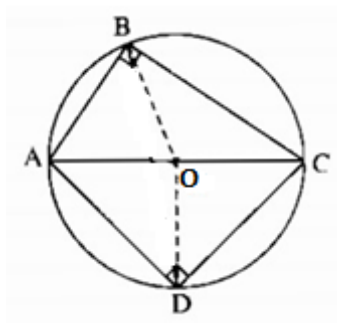
DẠNG 2. CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

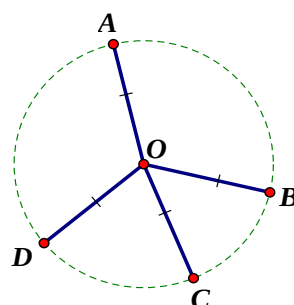
• **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $A + C = 180^\circ$ hoặc $B + D = 180^\circ$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90° thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



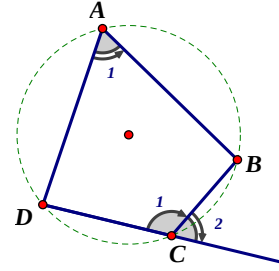
• **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA = OB = OC = OD$.



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $A_1 = C_2$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $A_1 = C_2$ (giả thiết)

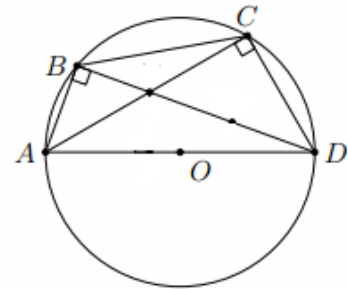
$$C_1 + C_2 = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{Suy ra } A_1 + C_1 = 180^\circ$$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối A_1 và C_1 bằng 180° , do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90° , đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề ABD, ACD cùng nhìn dưới cạnh AD . $ABD = ACD = 90^\circ$ $OA = OD$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD .



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $ABD = 90^\circ$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (1)

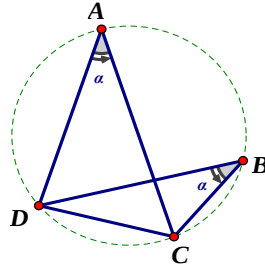
Xét tam giác ACD có $ACD = 90^\circ$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD .

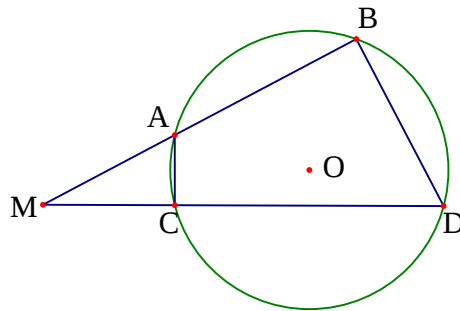
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.

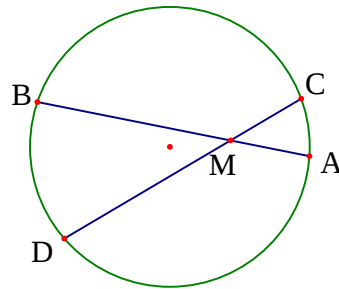


Nếu $CAD = CBD = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M . Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1



Hình 2

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• **Trường hợp 1 (Hình 1)**

$$\text{Ta có: } MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\angle MAC$ chung

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (\text{c-g-c}) \Rightarrow \angle MAC = \angle MDB \Rightarrow ABCD \text{ nội tiếp.}$$

• **Trường hợp 2 (Hình 2)**

$$\text{Ta có: } MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\angle AMC = \angle DMB$ (đối đỉnh)

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (\text{c-g-c}) \Rightarrow \angle MAC = \angle MDB$$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của BD và CE .

- a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E . Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D .

- a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.
- b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Ví dụ 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của AM và CN .

- a) Chứng minh $\angle ABC = \angle CHM$.
- b) Chứng minh $\angle ADC = \angle AHC$.
- c) Chứng minh $\angle MAC = \angle MNC$.
- d) Chứng minh $\angle MAC + 90^\circ = \angle ANM$.

DẠNG 3. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE , BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

- a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.
- b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.
- c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q , dây cung PQ không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm của đoạn PQ , J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN . Chứng minh rằng :

- a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$
- b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM . Và $AP.AQ = AI.AJ$

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD vuông góc với AB tại F . Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B , M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

- a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp
- b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD
- c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$
- d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB , N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M .

- Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.
- Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD . Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E . Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với AD ($F \in AD$)

- Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp
- Chứng minh $AE.AC = AF.AD$
- Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

DẠNG 4. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ đường kính AD . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

- Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau
- Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC .

- Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.
- Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.
- Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

DẠNG 5. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

- Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.
- Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Chứng minh rằng:

- Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn
- $AE.BC = EF.AB$
- $OA \perp EF$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$. Từ D kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc BC), kẻ DF vuông góc với AC (F thuộc AC). Đường thẳng EF cắt tia AB tại K .

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $DFE = DAB$.
- Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB , bán kính OC vuông góc với AB . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

- Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn
- Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\angle CMA = 90^\circ$
- Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

DẠNG 6. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

- Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp
- Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$
- Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

- Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp
- Chứng minh CO vuông góc với OD
- Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.18. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

- $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 80^\circ$;
- $\hat{B} = 70^\circ, \hat{C} = 90^\circ$;
- $\hat{C} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ$;
- $\hat{D} = 110^\circ, \hat{A} = 80^\circ$.

9.19. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O) . Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm A, B và C, D sao cho A nằm giữa B và I, C nằm giữa D và I . Chứng minh rằng

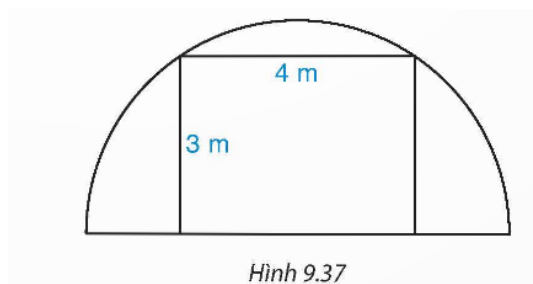
$$IBD = ICA, IAC = IDB \text{ và } IA \cdot IB = IC \cdot ID.$$

9.20. Cho hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

9.21. Cho hình thang $ABCD$ (AB song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

9.22. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2,5\text{cm}$.

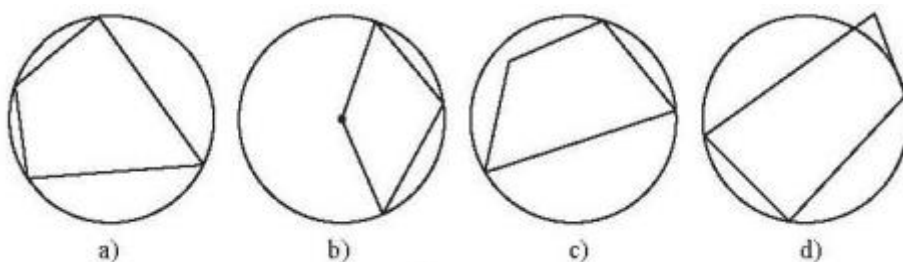
9.23. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng $4m$ và cao $3m$, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như Hình 9.37. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



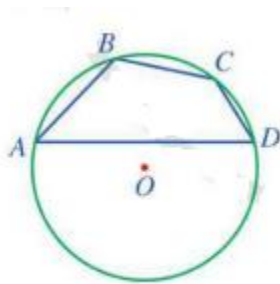
Hình 9.37

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

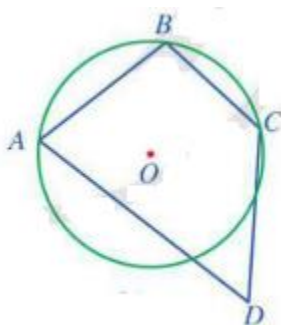
Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



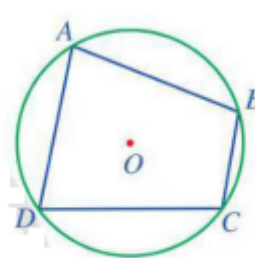
Bài 2. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$? Giải thích.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 3. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA . Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được

b) $AC.AE = \frac{AB^2}{4}$

Bài 4. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trục tâm là điểm H . Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B, C). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N, H, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn $O; R$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn O (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM . Chứng minh $MG \parallel BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM .

Bài 6. Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E . Chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN .

Bài 7. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABMQ$ và $ADNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Bài 8. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) . Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM ; CM, BM cắt d lần lượt tại D, E . Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 9. Cho đường tròn $O; R$ nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$, tính OO' theo R .

b) Các đường phân giác trong của B và C cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc HAC . Phân giác trong góc ABC cắt AH, AD lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng: $\angle BND = 90^\circ$.

Bài 11. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) P là điểm trên cạnh đáy BC . Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với AB, AC ($E \in AC, D \in AB$) gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE . Chứng minh bốn điểm Q, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Bài 13. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O) , H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK . Điểm I là giao điểm của AH, MK . Chứng minh I là trung điểm của HA .

Bài 14. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB . Lấy một điểm M trên tia Ax ($M \neq A$). Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E , Vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại D ($D \neq B$).

a) Chứng minh: Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Dựng đường thẳng d qua A song song BC , đường thẳng d' qua C song song BA , gọi D là giao điểm của d và d' . Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O) . Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\angle AOF = 2\angle CAE$

c) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Bài 16. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E . Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK, MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI .

Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC . Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Bài 19. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm D thuộc cung nhỏ AB (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G . Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\triangle EBC \sim \triangle BCG$

b) Tính số đo góc BIC . Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC . Chứng minh rằng $BK^2 = KI \cdot KD$

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC < BC$), đường cao CK và đường phân giác BD ($K \in AB, D \in AC$). Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I .

a) Chứng minh tứ giác $CDKI$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC \cdot AD = DH \cdot AB$.

c) Gọi F là trung điểm của AD . Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

- a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.
- b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .
- c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Bài 22. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M ($M \neq A$). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

- a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp
- b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H . Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$
- c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Bài 23. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M , tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.
- b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$
- c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD ; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F . Chứng minh rằng: $BF \parallel AM$.

Bài 24. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , đường cao BE và CF . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S , BC và OS cắt nhau tại M .

- a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.
- b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.
- c) Gọi AM cắt EF tại N , AS cắt BC tại P . Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Bài 25. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.
- b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C). Chứng minh: $MN \parallel EF$.
- c) Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Bài 26. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $O; R$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC (D, E, F là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $O; R$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK .
- c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $O; R$ và đỉnh A di động trên cung lớn BC của đường tròn $O; R$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Bài 27. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E .

- a) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.
- c) Chứng minh: $AD \cdot AE + BH \cdot BA = 2022^2$.
- d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Bài 28. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M, C). Gọi H là trung điểm BC. Đường thẳng OH cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

- a) Chứng minh tứ giác AKHD là tứ giác nội tiếp
- b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA \cdot ND$
- c) Chứng minh rằng khi đường tròn (O; R) và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Bài 29. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

- a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.
- b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK \cdot OM = R^2$
- c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Bài 30. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

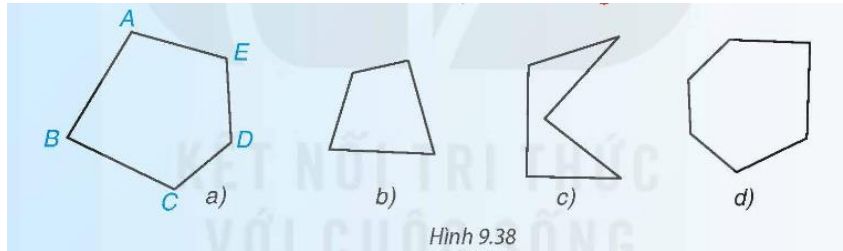
- a) Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn
- b) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
- c) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

BÀI 30. ĐA GIÁC ĐỀU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa giác đều

- Những hình như Hình 9.38 được gọi chung là các *đa giác*.



- Đa giác $ABCDE$ (H.9.38a) là hình gồm năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Đa giác $ABCDE$ có năm đỉnh là các điểm A, B, C, D, E ; năm cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA và năm góc là các góc EAB, ABC, BCD, CDE, DEA .

- Nếu với một cạnh bất kì của đa giác, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi. Các đa giác trong Hình 9.38 a, b, d là các đa giác lồi. Đa giác trong Hình 9.38c không phải đa giác lồi.

Định nghĩa: Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Người ta chứng minh được rằng các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm của đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn đó.

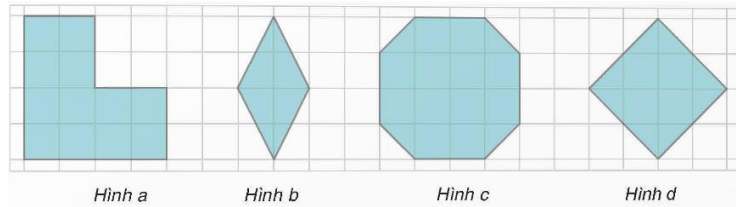
Ví dụ 1. a) Dưới đây là hình các đa giác đều thường gặp trong hình học (H.9.41).



b) Trong nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo và thế giới tự nhiên có nhiều hình phẳng có dạng đa giác đều. Những hình phẳng này không chỉ đẹp vì sự cân đối hài hoà mà còn tối ưu trong việc sắp xếp và sử dụng (H.9.42).



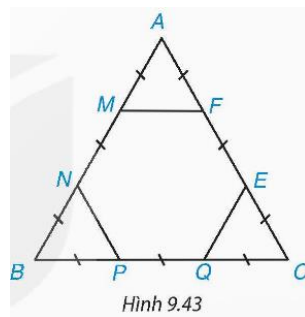
Ví dụ 2. Trong các hình phẳng dưới đây, hình phẳng nào có dạng là một đa giác đều?



Lời giải

Ta thấy đa giác trong hình a không phải đa giác lồi, đa giác trong hình b là hình thoi có các góc không bằng nhau, đa giác trong hình c là bát giác có các cạnh không bằng nhau, đa giác trong hình d là hình vuông. Do vậy chỉ có hình phẳng trong hình d có dạng đa giác đều.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh 6 cm. Trên cạnh AB lấy các điểm M, N ; trên cạnh BC lấy các điểm P, Q ; trên cạnh CA lấy các điểm E, F , sao cho các đoạn thẳng $AM, MN, NB, BP, PQ, QC, CE, EF, FA$ đều bằng 2 cm như Hình 9.43. Hỏi $MNPQEF$ có là một lục giác đều hay không?



Lời giải

Theo Hình 9.43, ta thấy $MNPQEF$ là một đa giác lồi. Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

Theo định lý Thalès đảo cho tam giác ABC và đường thẳng MF thì $MF \parallel BC$.

Suy ra $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó $MF = \frac{BC}{3} = 2 \text{ cm}$. Tương tự, $NP = QE = 2 \text{ cm}$.

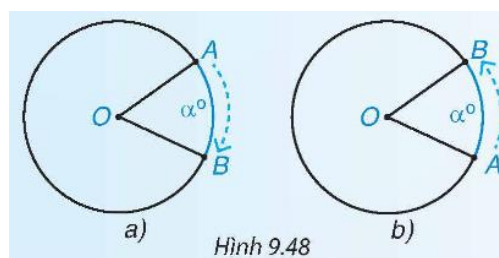
Vậy lục giác $MNPQEF$ có tất cả các cạnh bằng nhau.

Mặt khác, tam giác AMF là tam giác đều vì $AM = MF = FA = 2 \text{ cm}$ nên $FMA = 60^\circ$ và $FMN = 180^\circ - FMA = 120^\circ$.

Tương tự các góc tại các đỉnh N, P, Q, E, F của lục giác $MNPQEF$ đều bằng nhau và bằng 120° . Vậy lục giác $MNPQEF$ có các cạnh và các góc bằng nhau. Do đó $MNPQEF$ là lục giác đều.

2. Phép quay

Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn (O, OA) sao cho tia OA quay thuận chiều quay của kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° (H.9.48a). Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (H.9.48b). Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.



Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.49. Hãy cho biết các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O sẽ biến các đỉnh A, B, C thành những điểm nào.

Lời giải

Các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O biến các điểm A, B, C thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng sau:

Đỉnh	A	B	C
Phép quay ngược chiều			
120°	B	C	A
240°	C	A	B
360°	A	B	C

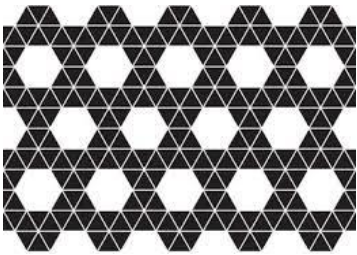
Khái niệm: Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$. Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng đa giác đều

Ví dụ 1. Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.

Ví dụ 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

Ví dụ 3. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.

Ví dụ 4. Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn $(O; R)$ sao cho số đo các cung AB, BC, CD, DE, EF, FA bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không?

Ví dụ 6. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $A = B = C = 108^\circ$. Ngũ giác $ABCDE$ có phải là ngũ giác đều không?

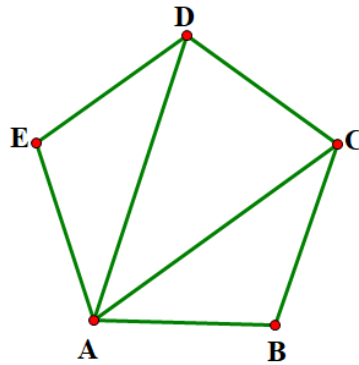
Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác $ABCDE$ đều ta phải chứng minh:

* Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).

* Các góc bằng nhau: $D = E = 108^\circ$.

Dạng 2. Tính toán

Ví dụ 1. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ như hình vẽ.



a) Tính tổng các góc trong của tam giác ABC, ACD, ADE , từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều $ABCDE$.

b) Tính số đo góc E .

Ví dụ 2. Cho hình tròn $(O; R)$.

a) Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.

b) Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R .

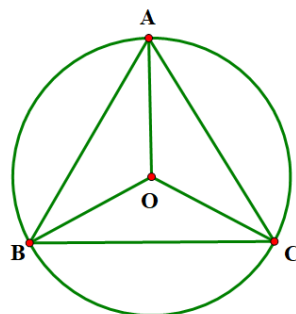
Dạng 3. Phép quay

Ví dụ 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .

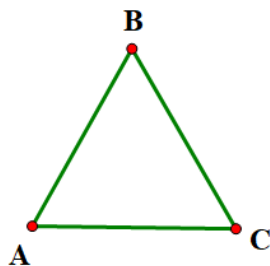
b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.



Hướng dẫn: Tương tự câu b, bài toán 9, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều và ngược chiều.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều như hình vẽ.



Điểm B biến thành điểm nào:

a) Phép quay thuận chiều 60° tâm A ;

b) Phép quay ngược chiều 300° tâm A .

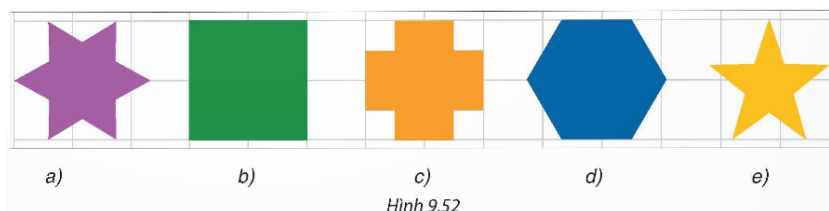
Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

Ví dụ 6. Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O . hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

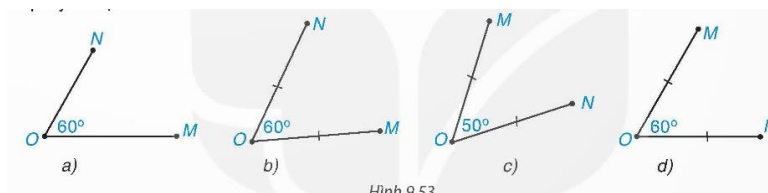
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.24. Trong các hình phẳng sau (H.9.52), hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Hình 9.52

9.25. Trong các hình dưới đây (H.9.53), hình nào vẽ hai điểm M và N thỏa mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?

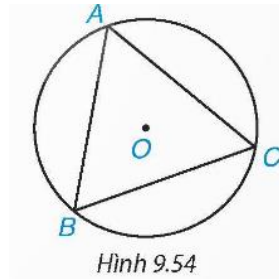


Hình 9.53

9.26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính 2 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

9.27. Cho hình thoi $ABCD$ có $A = 60^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MBNPDQ$ là lục giác đều.

9.28. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.54. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Hình 9.54

9.29. Liệt kê năm phép quay giữ nguyên một ngũ giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O .

9.30. Cho vòng quay mặt trời gồm tám cabin như Hình 9.55. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều quay của kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Hình 9.55

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Bài 2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

Bài 3. Cho tam giác đều ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Gọi I , K , M theo thứ tự là trung điểm của HA , HB , HC . Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Bài 4.

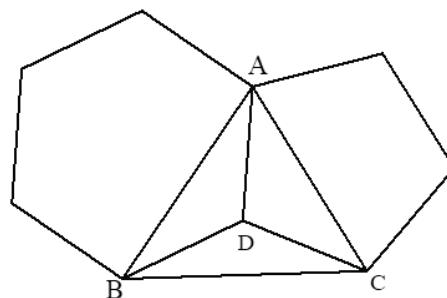
a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Bài 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB , BC , CD , DE , EF , FA lấy các điểm A' , B' , C' , D' , E' , F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Bài 7. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



Bài 8. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng

- a) $DIBC$ là hình bình hành;
- b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

Bài 9*. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng

- a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
- b) ME song song với AF .

Bài 10. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $A = B = C$.

- a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- b) Chứng minh ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.

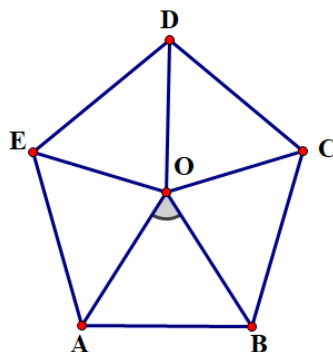
Bài 11. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Bài 12. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O .

- a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

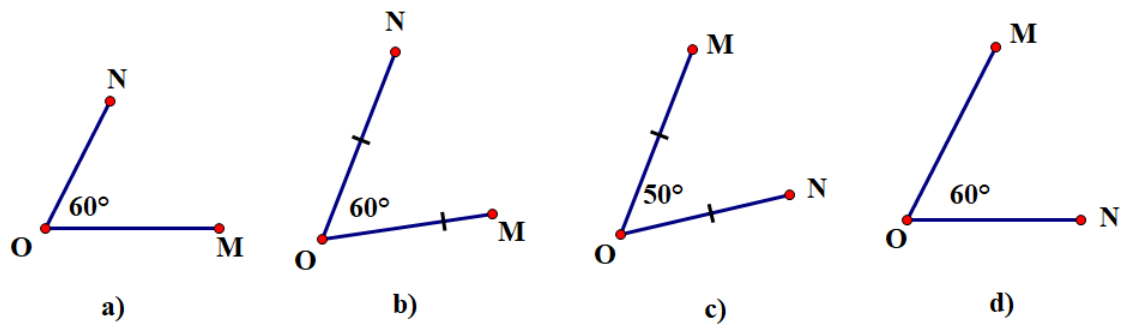
Bài 13. Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc 90° ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

Bài 14. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình vẽ).

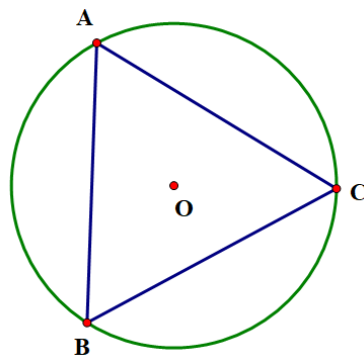


- a) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- b) Chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Bài 15. Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm M và N thoả mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



Bài 16. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Bài 17. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.



LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $OAB = 30^\circ$, $OAC = 40^\circ$. Hãy tính số đo của các góc ABC và ACB .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

BÀI TẬP

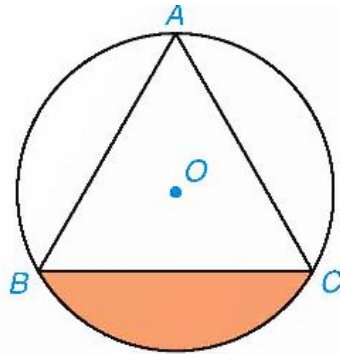
9.13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $BOC = 120^\circ$ và $OCA = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

9.14. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4cm . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

9.15. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.26.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .



Hình 9.26

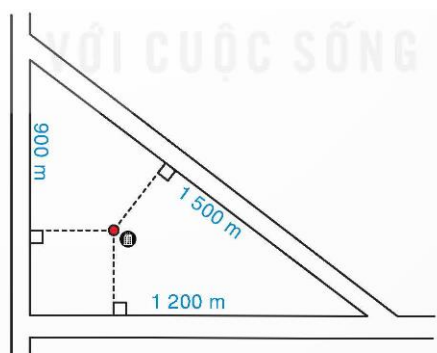
9.16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với độ dài cạnh bằng 60m , người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50m , hỏi có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

9.17. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu dân cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900m , 1200m và 1500m (H.9.27).

a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn

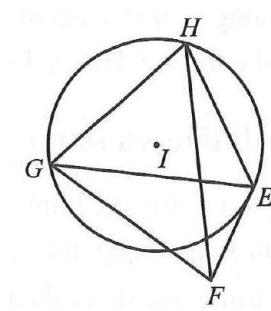
sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?



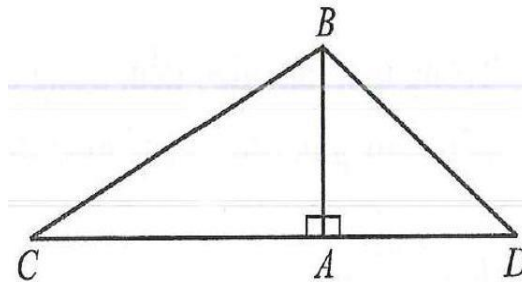
Hình 9.27

B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1: Quan sát Hình 3 và cho biết một tam giác nội tiếp đường tròn (I) và ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I).



Bài 2: Cho hai tam giác ABC và ABD (Hình 4) có $BAC = BAD = 90^\circ$, $AB = 3\text{ cm}$, $AD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$.



- a) Xác định các điểm O, I lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .
b) Tính bán kính của các đường tròn (O) và (I).

Bài 3: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính 5 dm . Tính độ dài cạnh của tam giác đều ABC đó.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có bán kính đường tròn nội tiếp là r . Chứng minh rằng:

$$r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Bài 5: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn ($I; r$). Các cạnh AB, AC lần lượt tiếp xúc với (I) tại D và E . Chứng minh rằng nếu $AB < AC$ thì $BE < CD$.

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , có O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng:

- Ba điểm A, O, I cùng thuộc một đường thẳng;
- Đường thẳng OA vuông góc với BC và đi qua điểm chính giữa D (khác điểm A) của cung BC .

b) Cho $BC = 24\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$. Tính độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

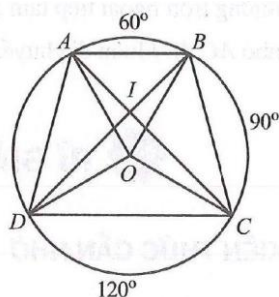
Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao BE, CD của tam giác ABC cắt nhau tại K . Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp mỗi tam giác sau:

- a) Tam giác BDE ;
b) Tam giác DEC ;
c) Tam giác ADE .

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC ($\hat{B} > \hat{C}$), phân giác AM . Gọi O, O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMB, AMC . Chứng minh rằng:

- a) OO_1, OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AB, AC, AM ;
b) Tam giác OO_1O_2 cân.

Bài 9. Trên đường tròn (O) bán kính R , lấy các điểm A, B, C, D sao cho số đo $\widehat{AB} = 60^\circ$, số đo $\widehat{BC} = 90^\circ$, số đo $\widehat{CD} = 120^\circ$ (Hình 7).



- a) Xác định tâm và tính theo R bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OAB, OBC, OAD, ODC
b) Gọi I là giao điểm của AC và BD . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB, IBC, IAD, IDC .

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$, bán kính đường tròn nội tiếp là r , bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Tính $\frac{r}{R}$.

Bài 11. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R .

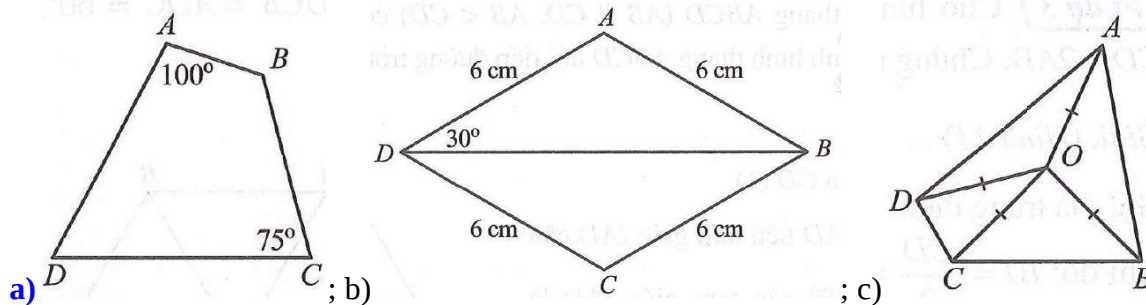
- a) Chứng minh rằng O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
b) Vẽ tam giác IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ với $JK \parallel BC, IJ \parallel AC, IK \parallel AB$. Chứng minh tam giác IJK đều.
c) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính $\frac{r}{R'}$.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm C, E (khác điểm A). Đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm D, F (khác điểm A). Chứng minh:

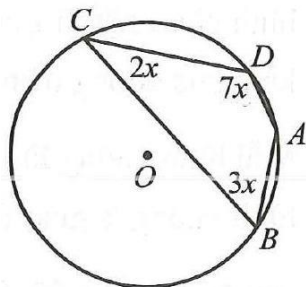
- a) C, B, F thẳng hàng;
b) Bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn;
c) A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE .

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC của đường tròn đó. Gọi F là giao điểm của EB và CO, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I luôn di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

Bài 14: Trong các hình 9a, 9b, 9c, ở hình nào ta có tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp?



Bài 15: Tính số đo góc DAB trong Hình 10.



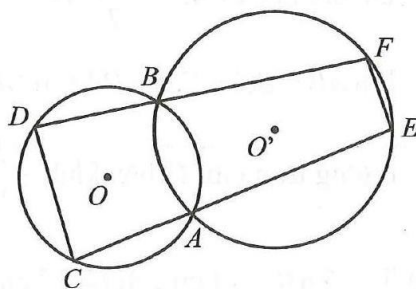
Bài 16: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$) có $DCB = ADC = 60^\circ$, $CD = 2AD$. Chứng minh hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Bài 17: Cho hình thoi $ABCD$, có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm (O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD). M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 19. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ giao nhau tại A, B và CD là một dây cung của (O) . Tia CA cắt (O') tại E và tia DB cắt (O') tại F . Chứng minh EF song song với CD .



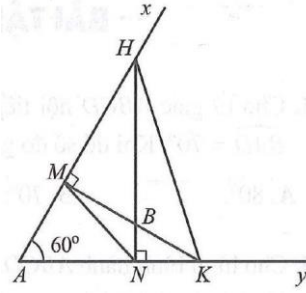
Bài 20. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC . Điểm E nằm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). ED là tia đối của tia EB . Chứng minh EC là phân giác của góc AED và EA là phân giác của góc BEC .

Bài 21. Cho tam giác ABC cân ở A, H là trung điểm của BC và $BAC < 90^\circ$. Đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC ở D . Kẻ DE vuông góc với AC . Chứng minh:

a) $AH = EH$;

b) $DCE = ABD$.

Bài 22. Cho $\angle xAy = 60^\circ$ và điểm B nằm trong góc xAy . Kẻ đường thẳng BN vuông góc với Ay cắt Ax tại H ; kẻ đường thẳng BM vuông góc với Ax cắt Ay tại K . Chứng minh:



- a) Các tứ giác $AMBN, HMNK$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn;
b) $HK = 2MN$.

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F . Tia CM cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh rằng:

- a) $NCA = MFN$ và $NEA = NCA$;
b) $CM + CN = EF$.

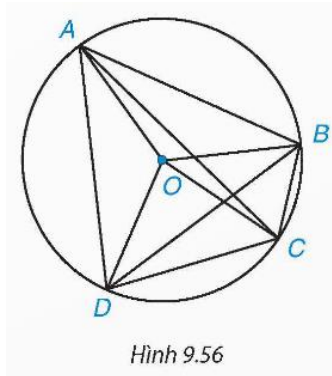
Bài 24. Chứng minh rằng mỗi hình thang cân là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC . Gọi I là giao điểm của EB và AC . Kẻ IK vuông góc với AB . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua một điểm cố định.

LUYỆN TẬP CHUNG

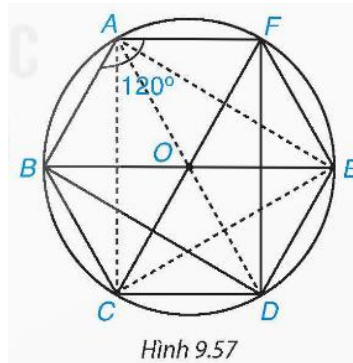
A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $AOB = 120^\circ$, $BOC = 40^\circ$, $COD = 80^\circ$. Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



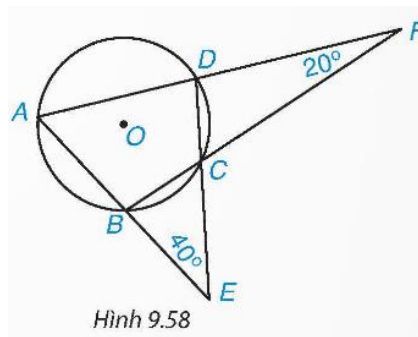
Ví dụ 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

- Tính số đo các góc BCF , BDF , BEF .
- Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .



9.31. Cho tam giác ABC có các đường cao AD , BE , CF . Chứng minh rằng $BCEF$, $CAFD$, $ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

9.32. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , AB cắt CD tại E , AD cắt BC tại F như Hình 9.58. Biết $BEC = 40^\circ$ và $DFC = 20^\circ$, tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



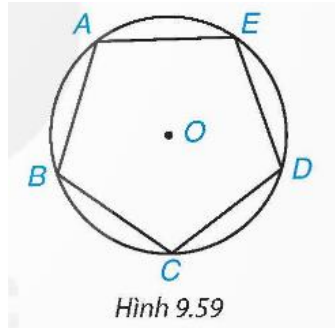
9.33. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi, diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

9.34. Biết rằng bốn đỉnh A, B, C, D của một hình vuông cùng nằm trên một đường tròn (O) theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ. Phép quay thuận chiều 45° biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm E, F, G, H .

- Vẽ đa giác $EA FBGCHD$.

b) Đa giác $EAFBGCHD$ có phải là một bát giác đều hay không? Vì sao?

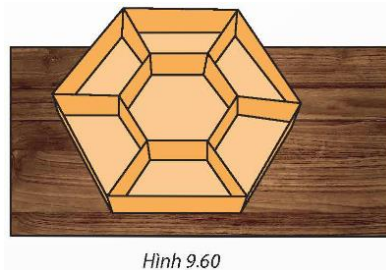
9.35. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.59.



a) Hãy tìm một phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C .

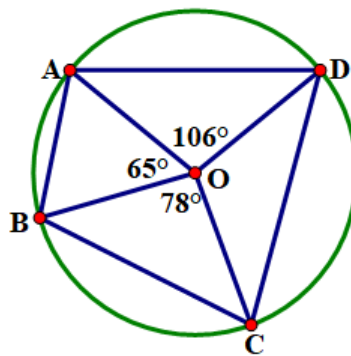
b) Phép quay trên sẽ biến các điểm B, C, D, E lần lượt thành những điểm nào? Phép quay này có giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$ không?

9.36. Người ta muốn làm một khay đựng bánh kẹo hình lục giác đều có cạnh 10 cm và chia thành 7 ngăn gồm một lục giác đều nhỏ và 6 hình thang cân như Hình 9.60. Hỏi lục giác đều nhỏ phải có cạnh bằng bao nhiêu để nó có diện tích bằng hai lần diện tích mỗi hình thang?



B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Tính số đo các của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong hình vẽ.



Bài 2. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm.

Hướng dẫn: Hình chữ nhật $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Bài 3. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R = 5$ cm.

a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O) .

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi 28 cm . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

ngoại tiếp hình vuông ABCD .

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AEHF, BDHF và CDHF là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E . Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH, BH cắt AC tại K . Chứng minh tứ giác HKCD nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a , bài toán 16 bằng cách chứng minh $\angle BKC = 90^\circ$.

Bài 8. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A Gọi I là trung điểm của dây BC. Chứng minh AMIO là một tứ giác nội tiếp.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm M bất kì trên đoạn AC , đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp;

b) Các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn:

Câu b) Cho hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chứng minh đường thứ ba đi qua điểm đó.

Bài 10. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) , các đường cao AD và E cắt nhau tại H . BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng: tứ giác DIMC nội tiếp.

Bài 12. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy F ($F \neq 0$) sao cho $CF = CA$. Vẽ CI vuông góc với AF tại I và CI cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng: tứ giác AIHC và BEIH nội tiếp.

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB . Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC . Chứng minh CBID nội tiếp.

Bài 14. Từ điểm A bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E, OE cắt AD ở N . Chứng minh rằng: tứ giác AONC nội tiếp.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK \cdot EB$.

b) Chứng minh: Tứ giác BOHK nội tiếp.

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác AFHE nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE.

b) Gọi M là giao điểm của EF và BC và AM cắt đường tròn (O) tại I. Chứng tỏ: tứ giác AEFI nội tiếp.

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác BFEC nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK \cdot MT = ME \cdot MF$.

c) Chứng minh tứ giác KTID nội tiếp.

Bài 18. Cho đường tròn (O; R). Lấy các điểm A, B, C, D, E trên đường tròn (O; R) sao cho số đo các cung AB, BC, CD, DE, EA bằng nhau. Đa giác ABCDE có là đa giác đều không? Vì sao?

Bài 19. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng DKFIEM là lục giác đều.

Bài 20. Cho lục giác đều ABCDEF. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng A'B'C'D'E'F' là một lục giác đều.

Bài 21. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Bài 22. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

Bài 23. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

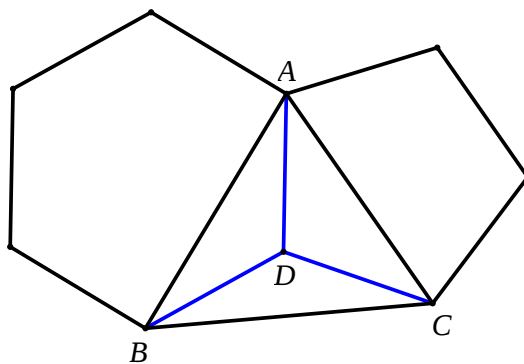
Phương pháp:

Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Bài 24. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài 25. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

9.37. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

9.38. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $A - C = 100^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $A = 80^\circ$. B. $C = 80^\circ$. C. $B + D = 100^\circ$. D. $A = 140^\circ$.

9.39. Đa giác nào dưới đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều. B. Hình chữ nhật. C. Hình bình hành. D. Tam giác.

B. TỰ LUẬN

9.40. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

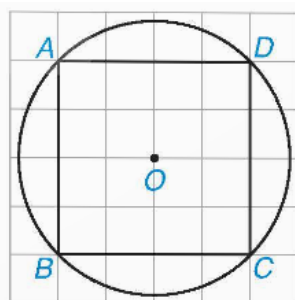
- a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp một đường tròn tâm I ;
- b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

9.41. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

9.42. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của hình lục giác đều đã cho.

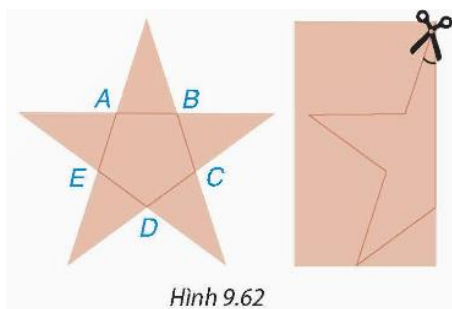
9.43. a) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (H.9.61). Phép quay thuận chiều 45° tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D' . Hãy vẽ tứ giác $A'B'C'D'$.

b) Phép quay trong câu a biến các điểm A', B', C', D' thành những điểm nào?



Hình 9.61

9.44. Bạn Lan muốn cắt hình ngôi sao có dạng như Hình 9.62 (trong đó $ABCDE$ là một ngũ giác đều). Lan gấp đôi tờ giấy, vẽ một nửa ngôi sao và cắt theo nét vẽ. Hỏi góc tạo bởi lưỡi kéo và nếp gấp lúc đầu bằng bao nhiêu độ?



Hình 9.62

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $A - C = 100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

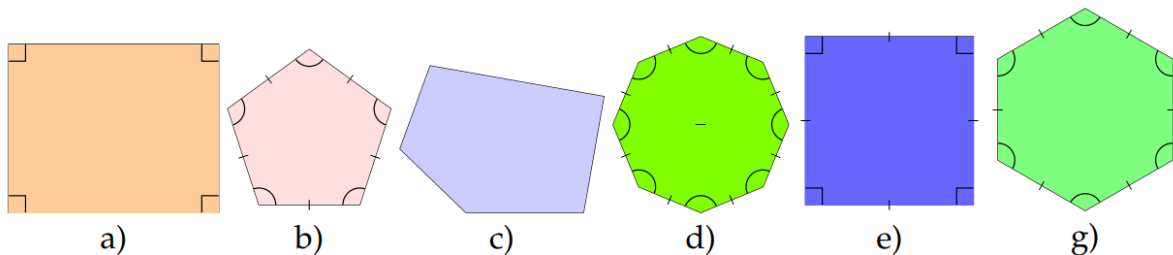
- A. $A = 80^\circ$. B. $B = 80^\circ$. C. $B + D = 100^\circ$. D. $A = 140^\circ$.

3. Đa giác nào sau đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều. B. Hình chữ nhật. C. Hình bình hành. D. Tam giác.

B. TỰ LUẬN

1. Tìm và gọi tên các đa giác đều trong hình dưới đây



2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

3. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy một điểm M và dựng đường tròn đường kính MC . Nối BM kéo dài gặp đường tròn tại D . Đường thẳng DA gặp đường tròn tại S . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc SCB .

5. M ở chính giữa nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên cung nhỏ BM lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại D . Gọi H là giao điểm của MB và AC . Kẻ HI vuông góc với AB . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc MCI .

6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AD , đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh $S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$.

7. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I ;
- b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

9. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính AM (Hình vẽ). Chứng minh $OAC = BAH$

10. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cắt đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cắt đoạn thẳng CD kéo dài tại N .

- a) Chứng minh hai tam giác ABM và AND bằng nhau;
- b) Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh $ABMO$ và $ANDO$ là các tứ giác nội tiếp;
- c) Chứng minh ba điểm B, D, O thẳng hàng.

11. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TẾ

BÀI 31. HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

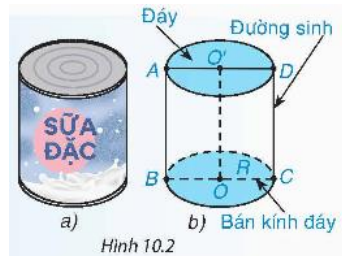
A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HÌNH TRỤ

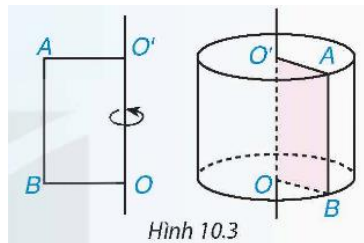
Nhận biết hình trụ

1. Hộp sữa (H.10.2a) có dạng một hình trụ.

Một số yếu tố của hình trụ được chỉ ra trên Hình 10.2b.



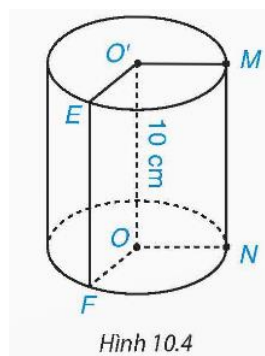
2. Khi quay hình chữ nhật $O'ABO$ một vòng quanh OO' cố định thì ta được một hình trụ (H.10.3), trong đó:



- Hai đáy của hình trụ là hai hình tròn bằng nhau $(O; O'A)$ và $(O; OB)$.
- Mỗi đường sinh là một vị trí của AB khi quay. Vậy hình trụ có vô số đường sinh.
 $R = O'A = OB$ gọi là bán kính đáy của hình trụ.
- Độ dài của đoạn OO' gọi là chiều cao của hình trụ. Các đường sinh bằng nhau và bằng OO' .

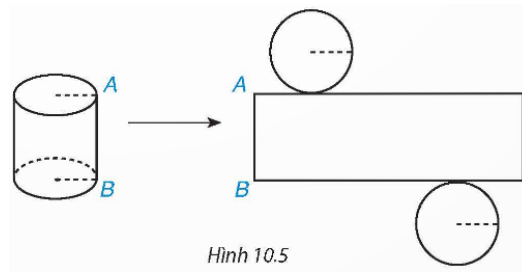
Ví dụ 1. Hãy kể tên một bán kính đáy và một đường sinh của hình trụ trong Hình 10.4. Cho biết chiều cao của hình trụ này.

Lời giải



$O'M$ là một bán kính đáy của hình trụ. EF là một đường sinh của hình trụ. Chiều cao $O'O = 10 \text{ cm}$.

Chú ý. Từ một hình trụ, nếu ta cắt rời hai đáy và cắt theo một đường sinh nào đó rồi trải phẳng ra thì ta được một hình phẳng (gồm hai hình tròn và một hình chữ nhật) như Hình 10.5 gọi là hình khai triển của hình trụ đã cho.



Hình 10.5

Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

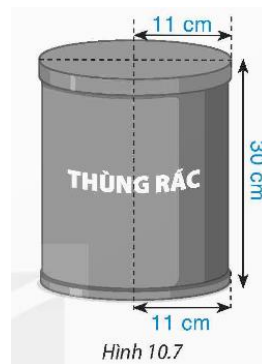
Ta có công thức tính diện tích mặt xung quanh (gọi tắt là diện tích xung quanh, kí hiệu là S_{xq}) của hình trụ như sau: $S_{xq} = 2\pi Rh$, trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi R^2 h$, trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy, R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Ví dụ 2. Bác Khôi dự định sơn lại một thùng rác có dạng hình trụ (sơn mặt ngoài và một đáy là nắp) có bán kính đáy bằng 11 cm, chiều cao bằng 30 cm (H.10.7).

a) Tính diện tích phần cần sơn của thùng rác.

b) Tính thể tích của thùng rác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 10.7

Lời giải

a) Phần cần sơn bao gồm mặt xung quanh và một đáy của hình trụ. Theo đề bài, ta có $R = 11\text{cm}$ và $h = 30\text{cm}$.

Do đó: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 11 \cdot 30 = 660\pi (\text{cm}^2)$; $S_{\text{đáy}} = \pi R^2 = \pi \cdot 11^2 = 121\pi (\text{cm}^2)$

Vậy diện tích cần sơn là $S = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = (660 + 121)\pi = 781\pi (\text{cm}^2)$.

b) Thể tích của thùng rác là $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 121\pi \cdot 30 = 3630\pi \approx 11404 (\text{cm}^3)$.

2. HÌNH NÓN

Nhận biết hình nón

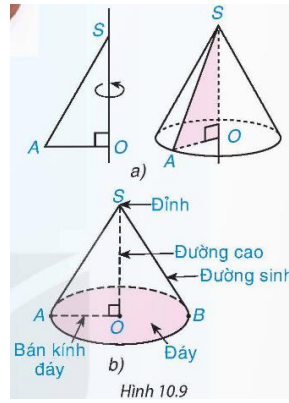
1. Đồ chơi, chi tiết cơ khí (H.10.8) có dạng một hình nón. Một số yếu tố của hình nón được thể hiện trên Hình 10.9b.



Hình 10.8

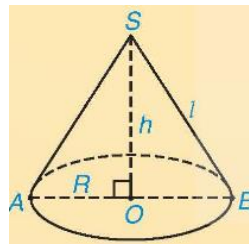
2. Khi quay tam giác vuông SOA (vuông ở O) một vòng quanh SO cố định thì ta được một hình nón đỉnh S

(H.10.9a), trong đó:



- Đáy của hình nón là hình tròn $(O; OA)$, $R = OA$ gọi là bán kính đáy của hình nón.
- Mỗi đường sinh là một vị trí của SA khi quay. Vậy hình nón có vô số đường sinh dài bằng nhau.
- SO gọi là đường cao của hình nón. Độ dài đoạn SO được gọi là chiều cao của hình nón.

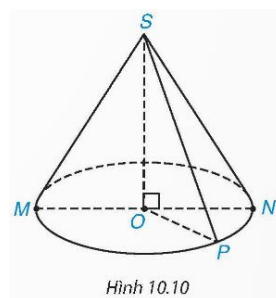
Một số yếu tố của hình nón:



Đỉnh: S . Chiều cao: $h = SO$. Đường sinh: $l = SA = SB$. Bán kính đáy: $R = OA$.

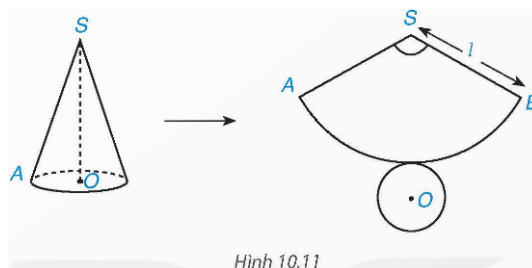
Ví dụ 3. Hãy kẻ tên đỉnh, đường cao, một bán kính đáy và một đường sinh của hình nón trong Hình 10.10.

Lời giải



Đỉnh: S . Đường cao: SO . Một bán kính đáy: OM . Một đường sinh: SM .

Chú ý. Cho một hình nón. Nếu ta cắt rời đáy và cắt mặt xung quanh của nó theo đường sinh SA rồi trải phẳng ra thì được một hình phẳng (gồm một hình tròn và một hình quạt tròn) như Hình 10.11 gọi là hình khai triển của hình nón đã cho.



Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón

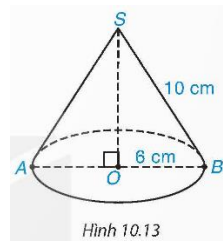
$S_{xq} = \pi rl$, trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao.

Ví dụ 4. Cho một hình nón có độ dài đường sinh bằng 10 cm, bán kính đáy bằng 6 cm (H.10.13).

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.



Lời giải

a) Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Tam giác SOB vuông tại O nên theo định lý Pythagore ta có:

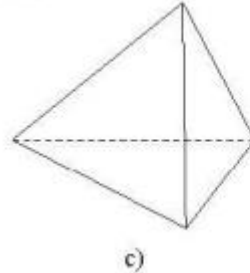
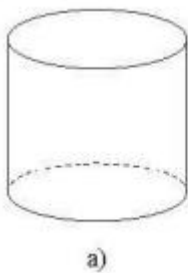
$$OB^2 + SO^2 = SB^2 \text{ hay } 6^2 + SO^2 = 10^2 \text{ suy ra } SO^2 = 100 - 36 = 64 \text{ suy ra } SO = 8 \text{ cm}$$

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. NHẬN DẠNG VÀ TẠO LẬP HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN

Ví dụ 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?

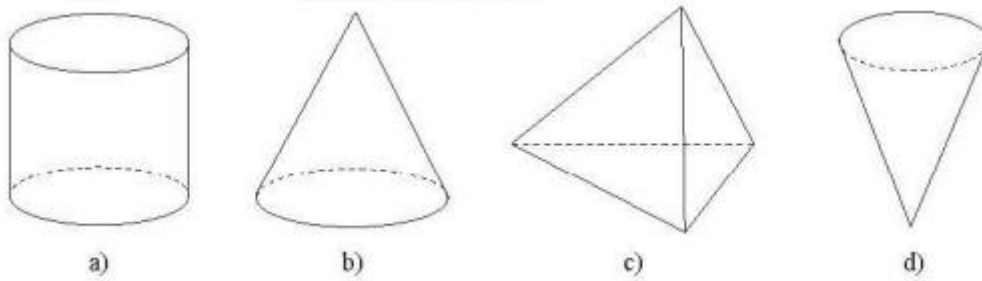


Ví dụ 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?

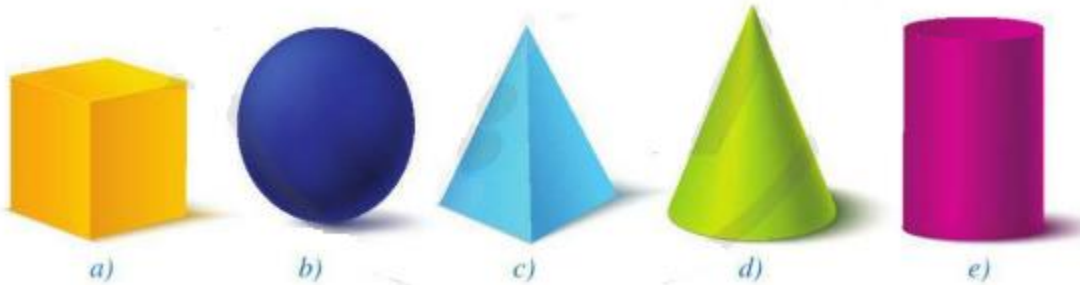


Ví dụ 3. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 5 \text{ (cm)}$ và chiều cao $h = 8 \text{ (cm)}$

Ví dụ 4. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón?



Ví dụ 5. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?



DẠNG 2. TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

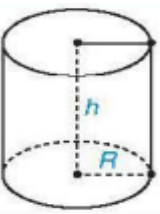
1. Phương pháp

Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h .

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r(h + r)$
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$

2. Ví dụ

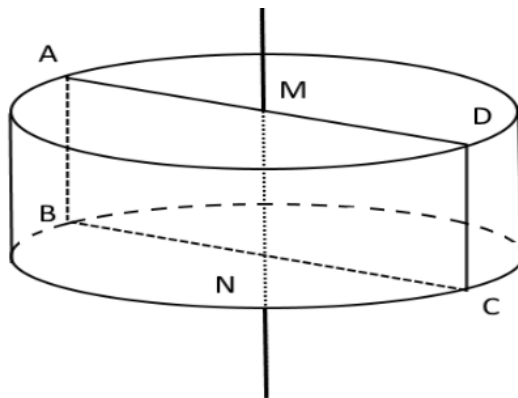
Ví dụ 1. Thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm ²)	Diện tích toàn phần (cm ²)	Thể tích (cm ³)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Ví dụ 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5(dm)$. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao hình trụ.

Ví dụ 3. Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1(cm)$, $AD = 2(cm)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

b) Tính thể tích hình trụ đó.

DẠNG 3. TÍNH BÁN KÍNH ĐÁY, ĐƯỜNG CAO, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

1. Phương pháp

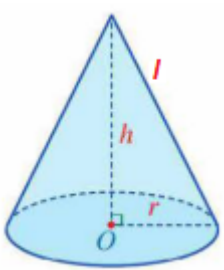
Cho hình nón có bán kính đáy r , đường cao h và đường sinh l .

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \frac{1}{2} C.l = \pi r l$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Chú ý: Hình nón và hình trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy r thì: $V_{nón} = \frac{1}{3} V_{trụ}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình nón có bán kính đáy r , đường cao h và đường sinh l như hình vẽ. Hãy thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình nón	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm ²)	Diện tích toàn phần (cm ²)	Thể tích (cm ³)
	3	4	?	?	?	?
	?	8	10	?	?	?
	2	?	?	14π	?	?
	4	?	9	?	?	

Ví dụ 2. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một hình nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của hình nón này thay đổi như thế nào so với ban đầu?

Ví dụ 3. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 4\text{cm}$ và $IM = 3\text{cm}$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

- Tính độ dài đường sinh hình nón.
- Tính diện tích xung quanh hình nón.
- Tính diện tích toàn phần hình nón.
- Tính thể tích hình nón.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại cân A , gọi I là trung điểm của BC , $BC = 2dm$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI ta được hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

DẠNG 4. ỨNG DỤNG CỦA HÌNH TRỤ TRONG THỰC TIỄN

Ví dụ 1. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy bằng $1,2\text{ m}$, chiều cao bằng bán kính đáy (như hình vẽ).



a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, 1 m^3 gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán.

Ví dụ 2. Một bồn nước inox Đại Thanh có dạng hình trụ với chiều cao $1,75\text{ m}$ và diện tích đáy là $0,32\text{ m}^2$.



a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thanh (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

Ví dụ 3. Người ta dự định làm dự định làm một chiếc bồn chứa dầu bằng sắt hình trụ có chiều cao $1,8\text{ m}$, đường kính đáy $1,2\text{ m}$. Hỏi chiếc bồn đó chứa đầy được bao nhiêu lít dầu, biết rằng $1\text{ m}^3 = 1000\text{ lít}$ (Bỏ qua bề dày của bồn, lấy $\pi = 3,14$)



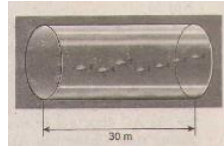
Ví dụ 4. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp sữa ông thọ dạng hình trụ, có chiều cao bằng 12 cm . Biết thể tích của hộp là $192\pi\text{ cm}^3$. Tính số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa ông thọ (kể cả hai nắp hộp), biết chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 80 000 đồng/m^2 . (làm tròn kết quả đến phần ngàn).



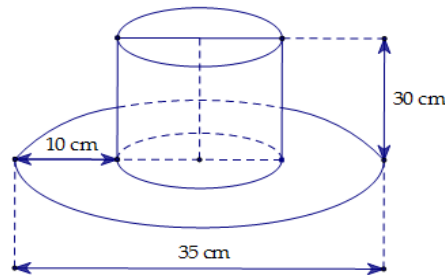
Ví dụ 5. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là $0,4\text{ cm}$, chiều dài ống hút là 18 cm . Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).



Ví dụ 6. Đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30 m . Dung tích của đường ống nối trên là $1\,800\,000\text{ lít}$. Tính diện tích đáy của đường ống.



Ví dụ 7. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật có dạng hình trụ và với kích thước mô phỏng như hình vẽ.



a) Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính phần viền, mép dán) (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hãy tính thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Ví dụ 8. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12 (cm) , chiều cao bằng 6 (cm) , chiều dài tạ bằng 30 (cm) và bán kính tay cầm là 2 (cm) . Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).



DẠNG 5. ỨNG DỤNG CỦA HÌNH NÓN TRONG THỰC TIỄN

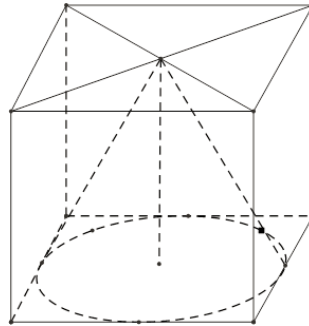
Ví dụ 1. Một chiếc nón có bán kính đáy bằng 15 cm và chiều cao bằng 20 cm . Hỏi chiếc nón mức đầy được bao nhiêu cm^3 nước (lấy $\pi = 3,14$).



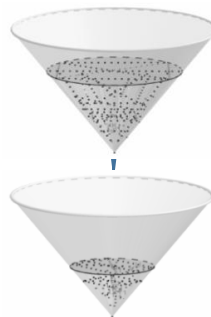
Ví dụ 2. Thầy Nam có một đồng cát hình nón cao 2 m , đường kính đáy 6 m . Thầy Nam tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình cần 30 m^3 cát. Hỏi thầy Nam cần mua bổ sung bao nhiêu m^3 cát nữa để đủ cát sửa nhà (lấy $\pi = 3,14$ và các kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Ví dụ 3. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.

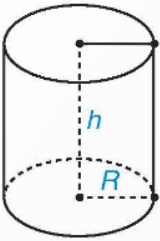


Ví dụ 4. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

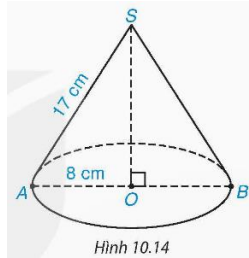
10.1. Thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	4	6	?	?
	3	5	?	?
	?	10	?	50π
	8	?	192π	?

10.2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$. Quay hình chữ nhật quanh cạnh AB một vòng, ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ tạo thành.

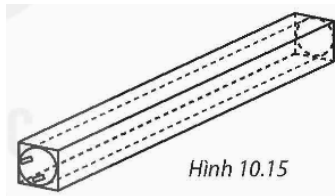
10.3. Khi cho tam giác SOA vuông tại O quay quanh cạnh SO một vòng, ta được một hình nón. Biết $OA = 8\text{cm}$, $SA = 17\text{cm}$ (H.10.14).

- Tính diện tích xung quanh của hình nón.
- Tính thể tích của hình nón.



Hình 10.14

10.4. Một bóng đèn huỳnh quang có dạng hình trụ được đặt khít vào một hộp giấy cứng dạng hình hộp chữ nhật (H.10.15). Hộp giấy có chiều dài bằng 0,6 m, đáy là hình vuông cạnh 4 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của bóng đèn (giả sử bề dày của hộp giấy không đáng kể).

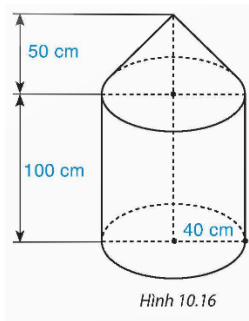


Hình 10.15

10.5. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với các kích thước như Hình 10.16.

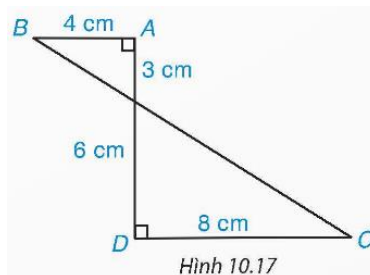
a) Tính thể tích của dụng cụ này.

b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính đáy của dụng cụ).



Hình 10.16

10.6. Tính thể tích của hình tạo thành khi cho hình $ABCD$ quay quanh AD một vòng (H.10.17).

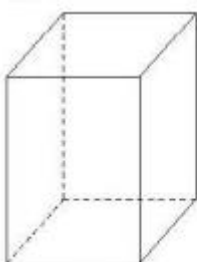


Hình 10.17

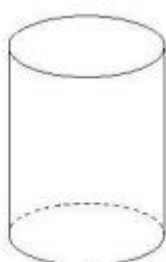
Vậy thể tích của hình tạo thành khi cho hình $ABCD$ quay quanh AD một vòng là $144\pi \text{ cm}^3$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

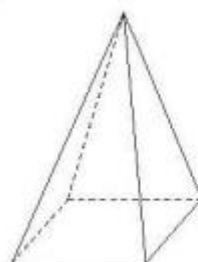
Bài 1. Trong các hình sau đây, hình nào là hình trụ?



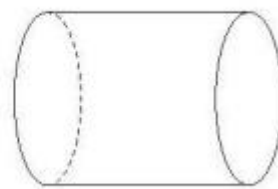
a)



b)



c)



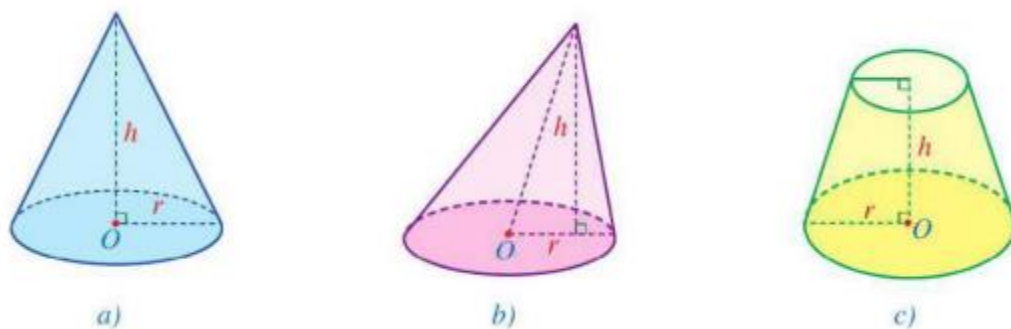
d)

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ?

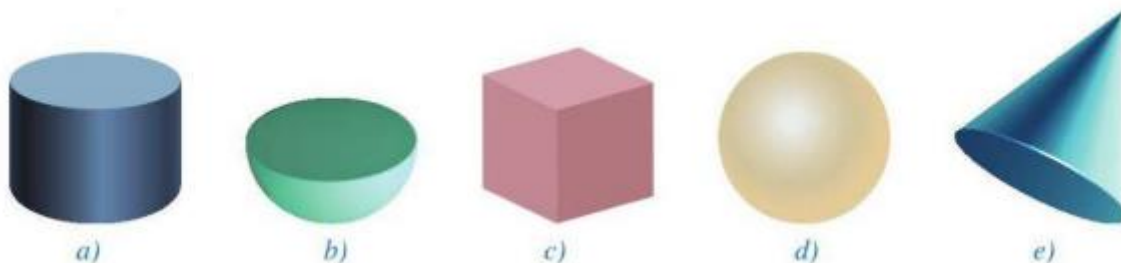


Bài 3. Tạo lập hình trụ có bán kính đáy $r = 4(cm)$ và thể tích $V = 224\pi(cm)$

Bài 4. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón có O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao?



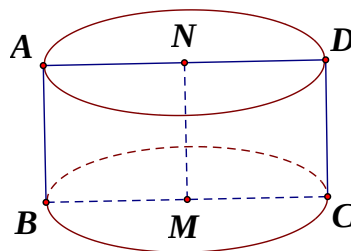
Bài 5. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình nón?



Bài 6. Cho hình trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h . Hỏi nếu tăng chiều cao lên 4 lần và giảm bán kính đáy 2 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng hay giảm?

Bài 7. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là $4\pi(dm^2)$ và bán kính đáy bằng nửa chiều cao. Tính thể tích hình trụ?

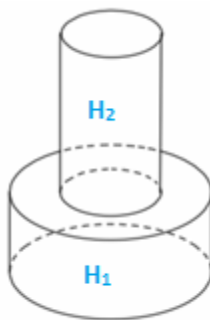
Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD . Khi quay hình chữ nhật trên quanh đường thẳng MN ta nhận được một hình trụ như hình vẽ.



a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ theo a .

b) Tính thể tích của hình trụ theo a .

Bài 9. Một khối đồ chơi gồm hai hình trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3 . Tính thể tích khối trụ (H_1) .



Bài 10. Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1 m. Thùng nước này có thể đựng được 1 m^3 nước không? Tại sao? (lấy $\pi = 3,14$)



Bài 11. Một bể nước hình trụ có chiều cao 2,5 m và diện tích đáy là $4,8\text{ m}^2$. Một vòi nước được đặt phẩy trên miệng bể và chảy được 4.800 lít nước mỗi giờ. Hỏi vòi nước chảy sau bao lâu đầy bể (Biết ban đầu bể cạn nước, bỏ qua bề dày của thành bể và $1\text{ m}^3 = 1000\text{ lít}$)



Bài 12. Một hộp đựng chè hình trụ có đường kính đáy bằng 8 cm và chiều cao bằng 12 cm. Tính diện tích giấy carton để làm một hộp chè đó, biết tỉ lệ giấy carton hao hụt khi làm một hộp chè là 5% (lấy $\pi = 3,14$).



Bài 13. Một đoạn ống nước hình trụ dài 5 m, có dung tích 32 m^3 . Tính diện tích đáy của ống nước đó.



Bài 14. Một hộp phô mai gồm có 8 miếng, độ dày mỗi miếng là 2 cm . Nếu xếp chúng lại trên một đĩa thì tạo thành chiếc bánh hình trụ có đường kính đáy bằng 10 cm . Hỏi mỗi miếng phô mai có thể tích bao nhiêu cm^3 (lấy $\pi = 3,14$).



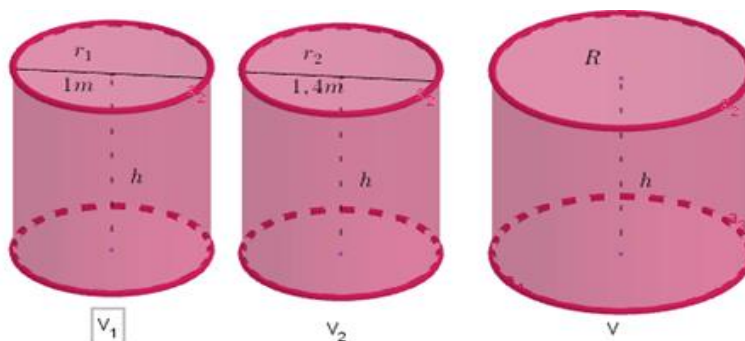
Bài 15. Một lọ thuốc hình trụ có chiều cao 10 cm và bán kính đáy bằng 5 cm . Nhà sản xuất phủ kín mặt xung quanh của lọ thuốc bằng giấy in các thông tin về loại thuốc ấy. Hãy tính diện tích phần giấy cần dùng của lọ thuốc đó (Độ dày của giấy in và lọ thuốc không đáng kể)?



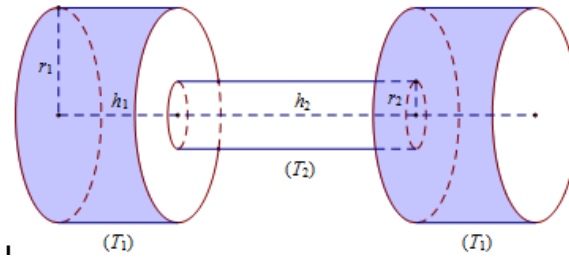
Bài 16. Để hưởng ứng cuộc vận động “Nói không với rác thải nhựa dùng một lần”, một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng sữa chua. Hộp giấy có dạng hình trụ có đường kính đáy là 6 cm ; chiều cao 7 cm và có nắp đáy làm bằng nhựa. Tính số m^2 giấy để sản xuất 100 hộp giấy trên. (Biết $1\text{ m}^2 = 10.000\text{ cm}^2$; lấy $\pi = 3,14$ và bỏ qua các mép dán vỏ hộp).



Bài 17. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và $1,4\text{ m}$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên (như hình vẽ). Tính bán kính đáy của bể nước dự định làm (làm tròn kết quả đến phần trăm).



Bài 18. Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2, h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30 \text{ (cm}^3\text{)}$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7 \text{ g/cm}^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

Bài 19. Cho tam giác vuông ABC tại A , $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB , ta thu được hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh l của hình nón

b) Tính thể tích hình nón.

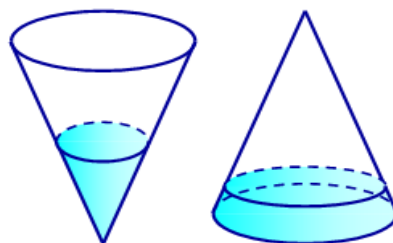
Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $ACB = 30^\circ$. Tính thể tích V của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

Bài 21. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 cm và đường sinh bằng 30 cm . Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3,14$).



Bài 22. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ 1 kg lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13 \text{ m}^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón 50 cm , chiều cao 30 cm thì cần bao nhiêu khối lượng lá? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

Bài 23. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm . Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10 cm . Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên thì chiều cao của cột nước trong phễu bằng bao nhiêu?



BÀI 32. HÌNH CẦU

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. MẶT CẦU VÀ HÌNH CẦU

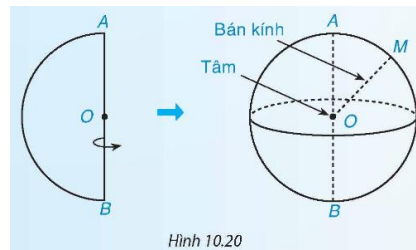
Nhận biết mặt cầu và hình cầu

1. Ta đã biết quả bóng (H.10.19) có dạng hình cầu.



Hình 10.19

Một số yếu tố của hình cầu được chỉ ra trên Hình 10.20.



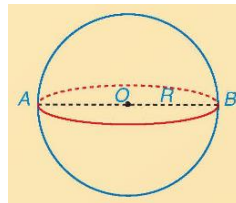
Hình 10.20

2. - Khi quay nửa đường tròn quanh đường kính AB cố định của nó, ta được một mặt cầu.

- Khi quay nửa hình tròn quanh đường kính AB cố định của nó, ta được một hình cầu.

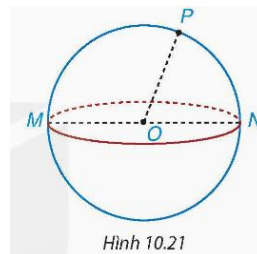
Tâm và bán kính của nửa đường tròn (hình tròn) cũng là tâm và bán kính của mặt cầu (hình cầu).

Một số yếu tố của mặt cầu:



Tâm mặt cầu: O . Bán kính mặt cầu: $R = OB$.

Ví dụ 1. Hãy kể tên tâm và một bán kính của mặt cầu trong Hình 10.21.



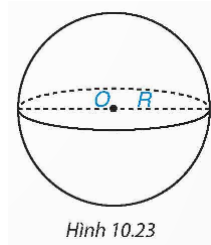
Hình 10.21

Lời giải

Tâm mặt cầu: O . Một bán kính: OP .

1. Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt phẳng và hình cầu (còn gọi là mặt cắt) là một hình tròn.

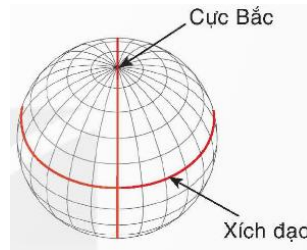
2. Nếu cắt một mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt phẳng và mặt cầu là một đường tròn (H.10.23).



Hình 10.23

- Khi mặt phẳng đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính R và được gọi là đường tròn lớn.
- Khi mặt phẳng không đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính nhỏ hơn R .

Ví dụ 2. Trái Đất của chúng ta được xem là có dạng hình cầu (nên còn gọi là “Địa Cầu”) và đường Xích đạo là một đường tròn lớn, dài khoảng 40075 km. Tính đường kính của Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của km).



Lời giải

Do đường Xích đạo là một đường tròn lớn nên bán kính của nó bằng bán kính của Trái Đất.

Nếu gọi R là bán kính Trái Đất thì độ dài của đường Xích đạo là $2R\pi \approx 40075(\text{km})$. Do đó, đường kính của Trái Đất là $2R \approx 40075 : \pi \approx 12756,27(\text{km})$.

2. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

Người ta chứng minh được công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính R là:

$$S = 4\pi R^2; V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

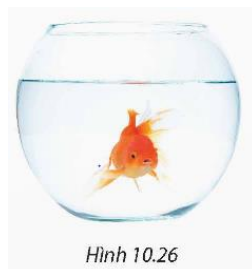
Ví dụ 3. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính bằng 10 cm .

Lời giải

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi (\text{cm}^2)$.

Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3} (\text{cm}^3)$.

Ví dụ 4. Bạn Trang có một bể cá có dạng một phần hình cầu với đường kính bằng 20 cm (H.10.26). Khi nuôi cá, Trang thường đổ vào bể lượng nước có thể tích bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu. Tính thể tích nước bạn Trang đã đổ vào bể cá. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 10.26

Lời giải

Bán kính của hình cầu là $20 : 2 = 10(\text{cm})$.

Thể tích của hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3} (\text{cm}^3)$.

Thể tích nước bạn Trang sử dụng để đổ vào bể cá là: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4000\pi}{3} = \frac{8000\pi}{9} \approx 2793 (\text{cm}^3)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. NHẬN DẠNG MẶT CẦU

Bài 1. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



a)



b)

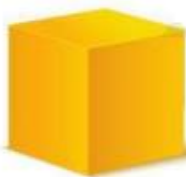


c)



d)

Bài 2. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



a)



b)



c)

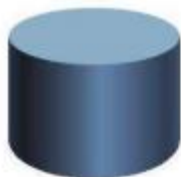


d)

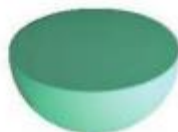


e)

Bài 3. Trong các vật thể ở các hình dưới đây, vật thể nào có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu?



a)



b)



c)



d)



e)

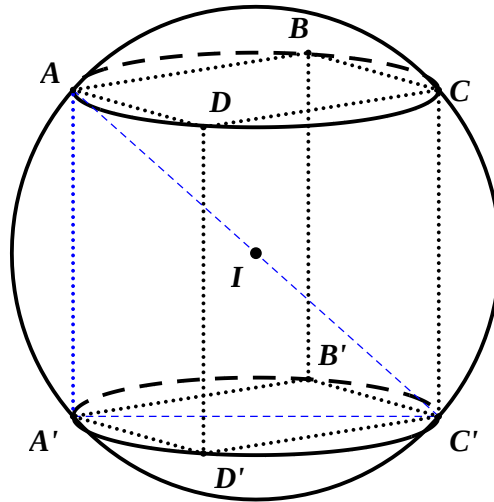
DẠNG 2. TÍNH BÁN KÍNH, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU

- Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$
- Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

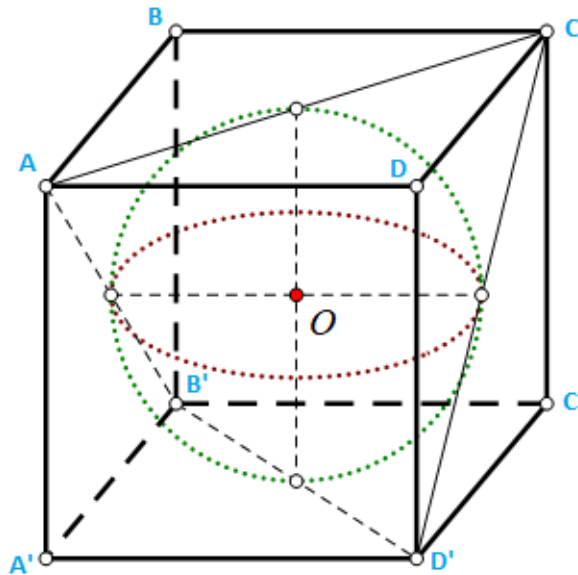
Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2cm$. Một mặt cầu đi qua tám đỉnh $A, B, C, D, A', B', C', D'$ của hình lập phương đó (như hình vẽ).



a) Tính bán kính hình cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3cm$. Một mặt cầu tiếp xúc sáu mặt của hình lập phương tại trung điểm các đường chéo của sáu mặt hình lập phương (như hình vẽ).

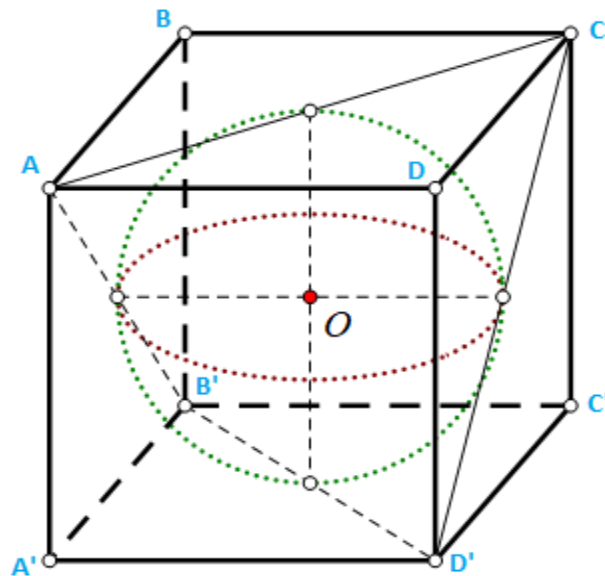


a) Tính diện tích mặt cầu trên.

b) Tính thể tích hình cầu trên.

Bài 4. Cho hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương (như hình vẽ). Gọi V_1 ; V_2 lần

lượt là thể tích của hình cầu và hình lập phương đó. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



DẠNG 3. ỨNG DỤNG CỦA MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Bài 1. Một quả bóng bàn dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm . Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).



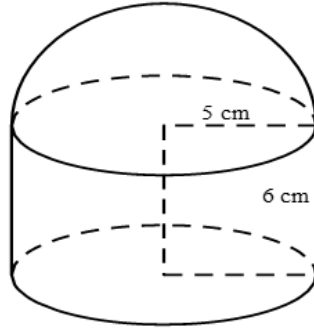
Bài 2. Một quả pha lê hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $144\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích quả pha lê đó.



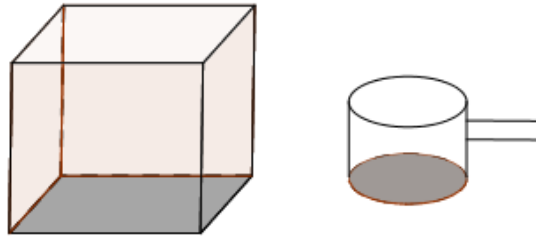
Bài 3. Trái Đất, hành tinh chúng ta đang sống, dạng hình cầu có bán kính là 6370 km . Biết rằng 29% diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước bao gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước (Lấy $\pi = 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



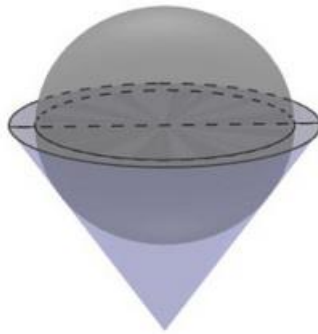
Bài 4. Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5\text{ cm}$, chiều cao $h = 6\text{ cm}$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là bao nhiêu?



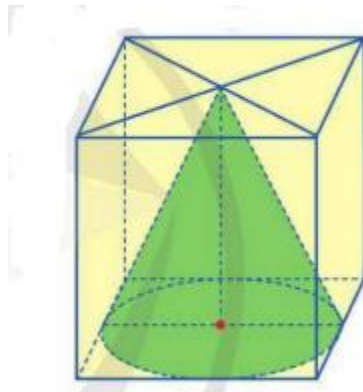
Bài 5. Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày bạn Đạt lấy nước ra ở trong bể bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là 5cm và bán kính đường tròn đáy là 4cm. Trung bình một ngày bạn Đạt múc ra 170 gáo nước để sử dụng (Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?



Bài 6. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi \text{ dm}^3$. Biết rằng hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của hình cầu chìm trong nước (hình bên dưới). Tính thể tích V của nước còn lại trong bình.

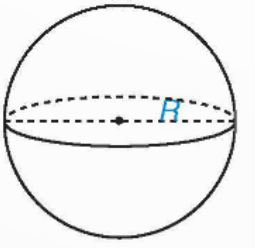


Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 5m. Đặt một hình nón có đỉnh trùng tâm của hình vuông và đáy là hình tròn tiếp xúc các cạnh của hình vuông như hình vẽ. Người ta đổ đầy nước vào hình lập phương, tính lượng nước cần đổ (giả sử hình nón đặc, không bị rỗng).



C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

10.7. Thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính (cm)	Diện tích mặt cầu (cm^2)	Thể tích hình cầu (cm^3)
	3	?	?
	?	100π	?
	?	?	972π

10.8. Một cốc đựng ba viên kem có dạng hình cầu, mỗi viên đều có bán kính bằng 3 cm. Tính thể tích của kem đựng trong cốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).

10.9. Một quả bóng đá có chu vi của đường tròn lớn bằng 68,5 cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da

hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích bằng $49,83cm^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng

da để làm quả bóng trên? (Coi phần mép khâu không đáng kể).

10.10. Hằng năm cứ dịp Tết đến Xuân về, dân làng Thuý Lĩnh, phường Lĩnh Nam, quận Hoàng Mai, Hà Nội lại tổ chức lễ hội vật cầu truyền thống. Trong lễ hội có sử dụng một quả cầu được tiện bằng gỗ, đường kính khoảng 35 cm, sơn đỏ mặt ngoài. Tính diện tích mặt ngoài của quả cầu gỗ nói trên.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một quả bóng bằng da có đường kính 22 cm. Tính diện tích da cần dùng để làm quả bóng nếu không tính tỉ lệ hao hụt (lấy $\pi = 3,14$).



Bài 2. Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 m và được làm bằng vải dù. Hãy tính diện tích vải dù để làm khinh khí cầu đó (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)



Bài 3. Một tháp nước có bể chứa hình cầu, đường kính bên trong của bể đo được là 6 m.

a) Tính thể tích của tháp nước đó?

b) Biết rằng lượng nước đựng đầy trong bể đủ dùng cho một khu dân cư trong 5 ngày. Cho biết khu dân cư có 1304 người. Hỏi trong một ngày mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước (lấy $\pi = 3,14$; biết $1 m^3 = 1000 \text{ lít}$).



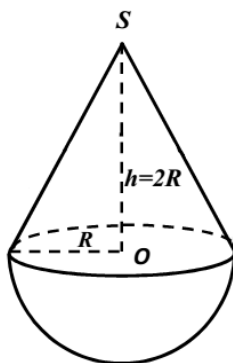
Bài 4. Một cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy nước có chiều cao bằng 10 cm và thể tích bằng $90\pi\text{ cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra khỏi cốc?



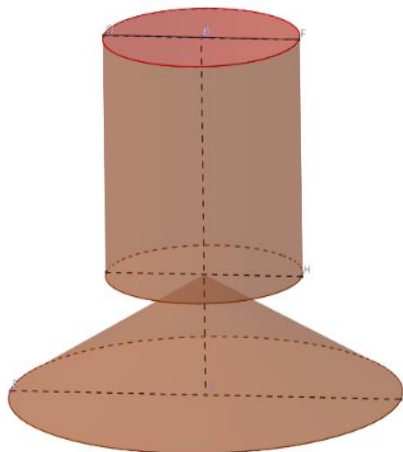
Bài 5. Người ta thả một quả trứng vào một cốc thủy tinh có nước, hình trụ; thấy trứng chìm hoàn toàn xuống đáy và nằm ngang thì chứng tỏ quả trứng đó còn tươi, mới được để từ một đến hai ngày. Hãy tính thể tích quả trứng đó, biết diện tích đáy của cột nước hình trụ là $16,7\text{ cm}^2$ và nước trong lọ dâng lên $0,82\text{ cm}$ khi quả trứng chìm hoàn toàn trong nước.



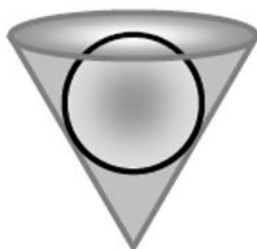
Bài 6. Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên dưới. Biết hình nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\text{ cm}^3$. Tính diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó.



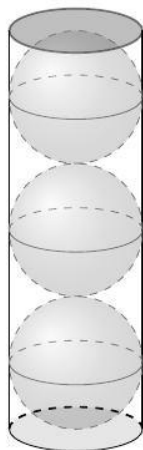
Bài 7. Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1, h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của hình nón (N) bằng 20 cm^3 . Tính thể tích của toàn bộ khối đồ chơi.



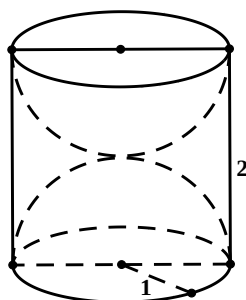
Bài 8. Thả một quả cầu đặc có bán kính 3 (cm) vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên dưới). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là 5 (cm). Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.



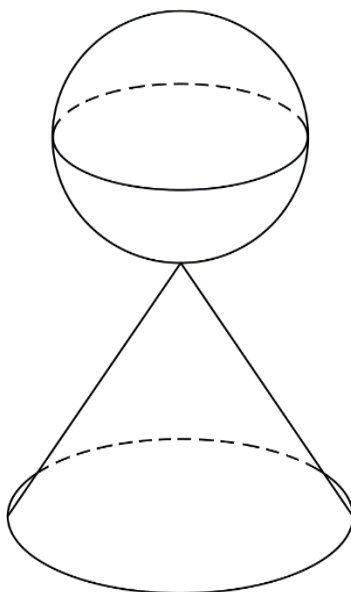
Bài 9. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Tính a gần.



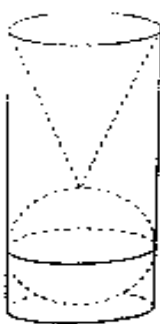
Bài 10. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu. Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu.



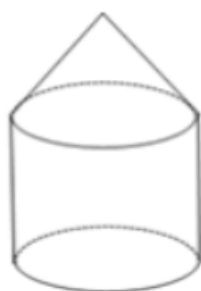
Bài 11. Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là 91cm^2 . Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



Bài 12. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một hình nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)

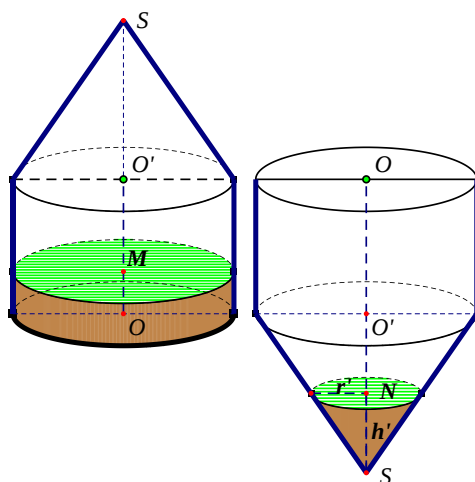


Bài 13. Một khối đồ chơi gồm một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh hình trụ bằng độ dài đường sinh hình nón và bằng đường kính hình trụ, hình nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là 50cm^3 , tính thể tích hình trụ.



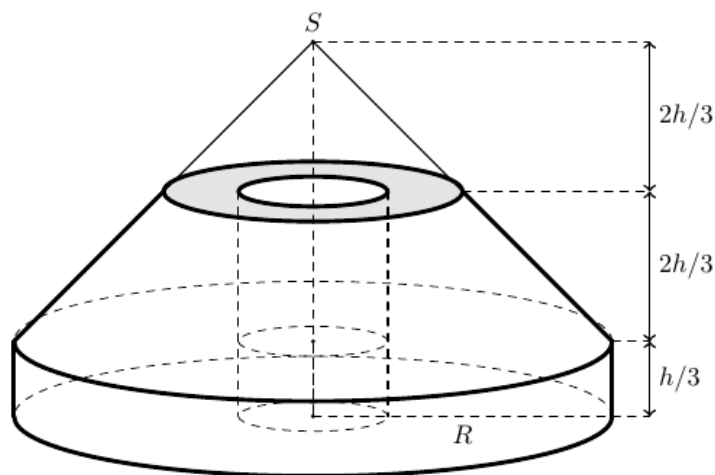
Bài 14. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h .

Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h .



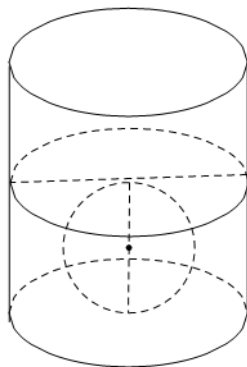
Bài 15. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5$ m gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1$ m và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;
- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);
- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).

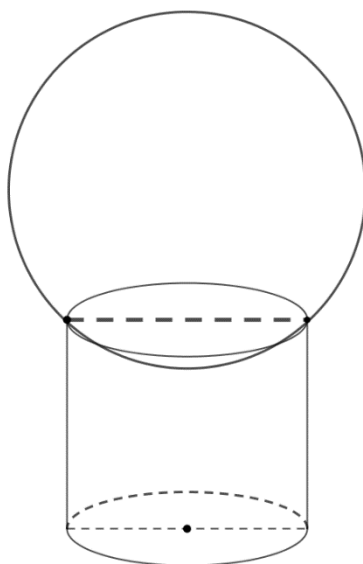


Tính thể tích của khối bê tông (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

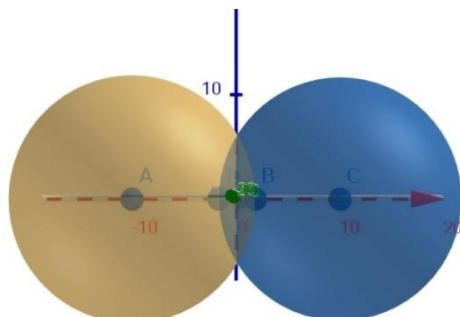
Bài 16. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7$ cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4$ cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5$ cm. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là bao nhiêu?



Bài 17. Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



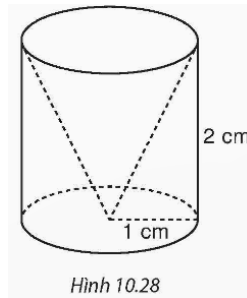
Bài 18. Công ty vàng bạc đá quý muốn làm một món đồ trang sức có hình hai hình cầu bằng nhau giao nhau như hình vẽ. Khối cầu có bán kính $25cm$ khoảng cách giữa hai tâm hình cầu là $40cm$. Giá mạ vàng $1m^2$ là 470.000 đồng. Nhà sản xuất muốn mạ vàng xung quanh món đồ trang sức đó. Tính số tiền cần dùng để mạ vàng khối trang sức đó.



LUYỆN TẬP CHUNG

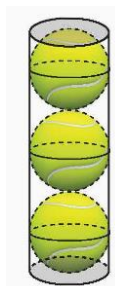
A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1 cm và chiều cao bằng 2 cm. Người ta khoan đi một phần có dạng hình nón như Hình 10.28 thì thể tích phần còn lại của hình trụ bằng bao nhiêu?



Hình 10.28

Ví dụ 2. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ chứa vừa khít ba quả bóng tennis xếp theo chiều dọc (H.10.29). Các quả bóng tennis có dạng hình cầu, đường kính 6,4 cm .



Hình 10.29

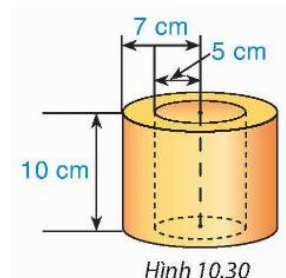
- Tính thể tích hộp đựng bóng (bỏ qua bề dày của vỏ hộp, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).
- Tính thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis.

BÀI TẬP

10.11. Cho một hình trụ có đường kính của đáy bằng với chiều cao và có thể tích bằng $2\pi \text{ cm}^3$.

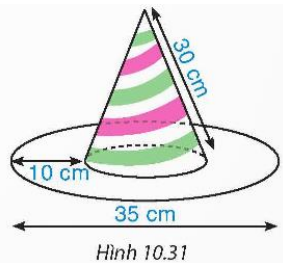
- Tính chiều cao của hình trụ.
- Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ trên.

10.12. Một vòng bi bằng thép (phần thép giữa hai hình trụ) có hình dạng và kích thước như Hình 10.30. Tính thể tích của vòng bi đó.



Hình 10.30

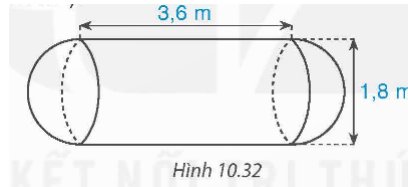
10.13. Chiếc mũ của chú hề với các kích thước như Hình 10.31. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm chiếc mũ (coi mép khâu không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).



Hình 10.31

10.14. Người ta nhả chìm hoàn toàn 5 viên bi có dạng hình cầu vào một chiếc cốc hình trụ đựng đầy nước, mỗi viên bi có đường kính 2 cm. Tính lượng nước tràn ra khỏi cốc.

10.15. Một bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu có đường kính bằng 1,8m và một hình trụ có chiều cao bằng 3,6m (H.10.32). Tính thể tích của bồn chứa xăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của m^3).



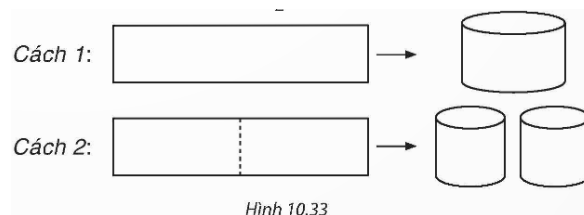
Hình 10.32

10.16. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $50\text{ cm} \times 240\text{ cm}$, người ta làm mặt xung quanh của các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (H.10.33):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng nước hình trụ.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm hình chữ nhật bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo Cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo

Cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ (giả sử các mối hàn là không đáng kể).



Hình 10.33

B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Một cốc thủy tinh hình trụ có chiều cao bằng 10 cm và thể tích bằng $90\pi\text{ cm}^3$. Tính bán kính của đáy cốc thủy tinh đó?



Bài 2. Một ống đong hình trụ có chiều cao gấp 5 lần bán kính. Biết thể tích ống đong bằng $40\pi\text{ cm}^3$. Tính chiều cao của ống đong đó.

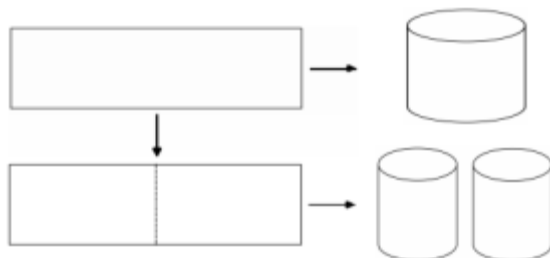


Bài 3. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{ cm} \times 240\text{ cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách

2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Bài 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính diện tích toàn phần của hình nón thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA' .

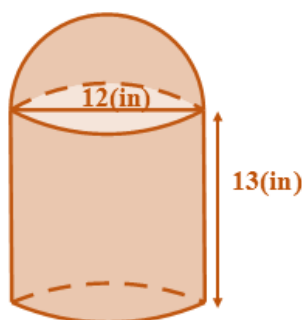
Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , cạnh $AB=6$, $AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC . Tính thể tích của hình nón thu được do tam giác BMC quay quanh AB .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB=6\text{ cm}$, $AC=8\text{ cm}$. Gọi V_1 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

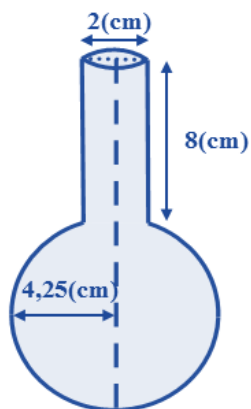
Bài 7. Chiếc nón do một làng nghề ở Việt Nam sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 cm , đường kính đáy bằng 40 cm . Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng làm 5000 chiếc nón.



Bài 8. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một khối linh kiện máy (gồm một hình trụ và một nửa hình cầu có cùng đáy) với các kích thước đã cho ở hình vẽ sau theo đơn vị in^2 .



Bài 9. Người ta đổ đầy nước vào một bình đựng với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích của phần nước trong bình (giả sử bề dày của ống nghiệm không đáng kể).

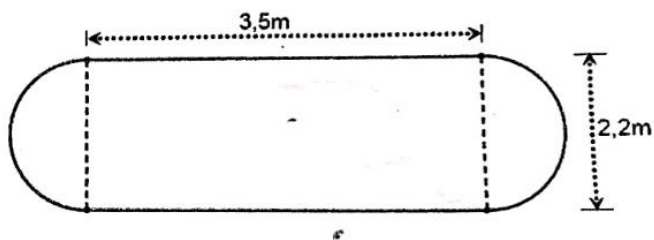


Bài 10. Các viên kẹo mút có dạng hình cầu, bán kính $1,6$ (cm). Người ta dùng một que nhựa hình trụ tròn, bán kính $0,2$ cm cắm vào đến phân nửa viên kẹo để người dùng tiện sử dụng.

- Tính thể tích phần ống nhựa hình trụ cắm vào phân nửa viên kẹo.
- Tính thể tích thực của viên kẹo sau khi trừ phần ống nhựa cắm vào.



Bài 11. Một bồn chứa xăng đặt trên xe gồm hai nửa hình cầu có đường kính là $2,2$ m và một hình trụ có chiều dài $3,5$ m (hình 2). Tính thể tích của bồn chứa xăng (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)



Hình 2

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

10.17. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh AB ta được một hình trụ có bán kính đáy bằng độ dài đoạn thẳng

- A. AB . B. CD . C. AD . D. AC .

10.18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$. Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC ta được một hình nón có chiều cao bằng

- A. 4 cm . B. 3 cm . C. 5 cm . D. 9 cm .

10.19. Diện tích mặt cầu có đường kính 10 cm là

- A. $10\pi\text{ cm}^2$. B. $400\pi\text{ cm}^2$. C. $50\pi\text{ cm}^2$. D. $100\pi\text{ cm}^2$.

10.20. Cho hình nón có bán kính đáy $R = 2\text{ cm}$, độ dài đường sinh $l = 5\text{ cm}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{10\pi}{3}\text{ cm}^2$. B. $\frac{50\pi}{3}\text{ cm}^2$. C. $20\pi\text{ cm}^2$. D. $10\pi\text{ cm}^2$.

10.21. Một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu, cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích $9\pi\text{ cm}^2$. Thể tích của hình cầu bằng

- A. $972\pi\text{ cm}^3$. B. $36\pi\text{ cm}^3$. C. $6\pi\text{ cm}^3$. D. $81\pi\text{ cm}^3$.

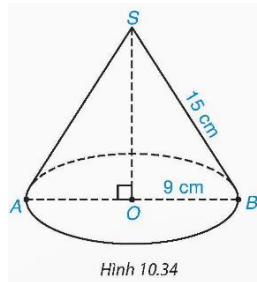
B. TỰ LUẬN

10.22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm , chiều cao bằng 30 cm .

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Tính thể tích của hình trụ.

10.23. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 9 cm , độ dài đường sinh bằng 15 cm (H.10.34).



Hình 10.34

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.

c) Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy. Tính diện tích toàn phần của hình nón đã cho.

10.24. Quả bóng rổ sử dụng trong thi đấu có dạng hình cầu với đường kính bằng 24 cm (H.10.35). Hãy tính:

a) Diện tích bề mặt quả bóng.

b) Thể tích của quả bóng.



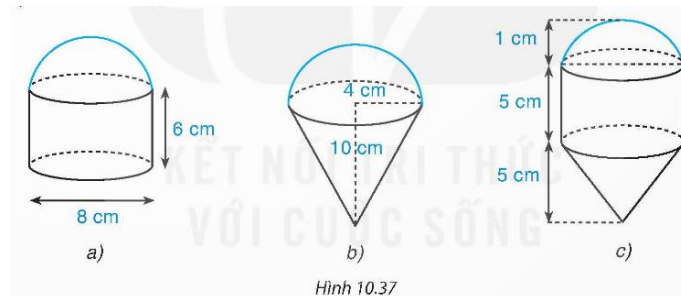
Hình 10.35

10.25. Đèn trời có dạng hình trụ không có một đáy với đường kính đáy bằng 0,8m và thân đèn cao 1 m (H.10.36). Tính diện tích giấy dán bên ngoài đèn trời (coi các mép dán không đáng kể).



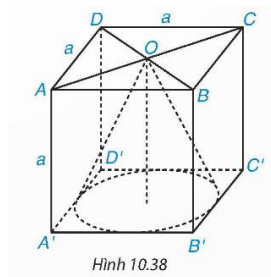
Hình 10.36

10.26. Các hình dưới đây (H.10.37) được tạo thành từ các nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính đáy). Tính thể tích của các hình đó theo kích thước đã cho.



Hình 10.37

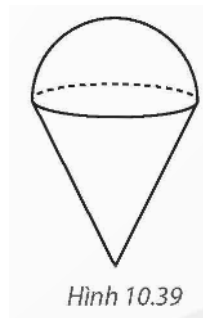
10.27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính thể tích của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ (H.10.38).



Hình 10.38

10.28. Bạn Khôi cho một hòn đá cảnh vào một bể nuôi cá hình trụ có đường kính đáy bằng 20 cm thì nước trong bể dâng lên 3 cm . Hỏi hòn đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

10.29. Một chiếc kem ốc quế gồm hai phần: Phần phía dưới dạng hình nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính đáy của hình nón phía dưới (H.10.39). Thể tích phần kem phía trên bằng 200cm^3 . Tính thể tích của cả chiếc kem.



Hình 10.39

10.30. Mái nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm Văn hoá Nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng ba chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam (H.10.40). Tính diện tích một mái nhà hình nón có đường kính bằng 45 m và chiều cao bằng 24 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của m^2).



Hình 10.40

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy cm	Chiều cao cm	Diện tích xung quanh cm^2	Diện tích toàn phần cm^2	Thể tích cm^3
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Bài 2. Điền đầy đủ các kết quả vào bảng sau

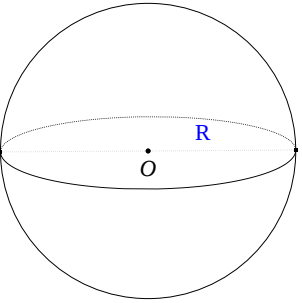
Hình	Bán kính đáy cm	Chiều cao cm	Chu vi đáy cm	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	2	20				
	10	8				
		16	8π			

Bài 3. Cho hình nón có bán kính r , đường kính đáy là d , chiều cao h , đường sinh l , thể tích V , diện tích xung quanh S_{xq} , diện tích toàn phần S_{tp} . Hoàn thành bảng sau:

r cm	d cm	h cm	l cm	S_{xq} cm^2	S_{tp} cm^2	V cm^3
3			5			
		8				96π
	10			65π		
15		20				

Bài 4. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu “?” bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?

	?	?	36π
	?	196π	

Bài 5. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

- Diện tích xung quanh của hình trụ.
- Diện tích toàn phần của hình trụ.
- Thể tích hình trụ.

Lời giải

- Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3,14 = 75,36 \text{ cm}^2$$

- Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 24\pi + 8\pi = 32\pi \approx 32 \cdot 3,14 = 100,48 \text{ cm}^2$$

- Thể tích hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3,14 = 75,36 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Bài 6. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là 314 cm^2 . Tính:

- Bán kính của đường tròn đáy (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).
- Thể tích của khối trụ.

Bài 7. Một hình trụ có bán kính của đường tròn đáy là 16 cm, chiều cao là 9 cm. Tính

- Diện tích xung quanh của hình trụ.
- Thể tích của hình trụ. (Lấy $\pi = 3,142$ làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 8. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi \text{ cm}^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Bài 9. Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

Bài 10. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

Bài 11. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4, BC = 2$. Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1 ; quay quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2 . Trong các đẳng thức dưới đây đẳng thức nào đúng?

- A.** $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = 2V_2$. **C.** $V_2 = 2V_1$. **D.** $V_2 = 3V_1$.

Bài 12. Cho hình chữ nhật ABCD cạnh $AB = 6 \text{ cm}; AD = 4 \text{ cm}$

- Quay quanh cạnh AB ta được 1 hình trụ có diện tích xung quanh bằng ?
- Quay quanh cạnh AD ta được 1 hình trụ có thể tích bằng ?

c) Gọi M, N là trung điểm của AB, CD . Nếu quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh trục MN , ta được một hình trụ có diện tích toàn phần là?

Bài 13. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là 270cm^3 , tính thể tích của hộp giấy.

Bài 14. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

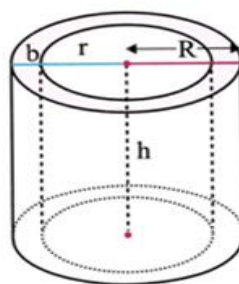
Bài 15. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3cm . Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

Bài 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là 48cm^2 , chu vi là 28cm . Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Bài 17. Hiện nay các văn phòng thường sử dụng loại thùng rác văn phòng, màu sắc, chất liệu thân thiện với môi trường. Trong ảnh là một thùng rác văn phòng có đường cao $0,8\text{m}$, đường kính $0,4\text{m}$. Tính thể tích của thùng rác này (Coi thùng rác văn phòng là hình trụ).



Bài 18. Người ta xây một bể ga hình trụ có bán kính $R = 1\text{m}$ (tính từ tâm bể đến mép ngoài), chiều dày của thành bể là $b = 0,05\text{m}$, chiều cao của bể là $h = 1,5\text{m}$. Tính dung tích của bể ga (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Bài 19. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 4\text{cm}$ và $IM = 3\text{cm}$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

- Tính độ dài đường sinh hình nón.
- Tính diện tích xung quanh hình nón.
- Tính diện tích toàn phần hình nón.
- Tính thể tích hình nón.

Bài 20. Cho tam giác $\triangle SO'A$ vuông tại S , $\triangle SOB$, gọi $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$ là trung điểm của

$$\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{R'^2 \cdot SO'}{R^2 \cdot SO} = \left(\frac{SO'}{SO} \right)^3 = \frac{1}{8}, \quad BC = 2dm. \text{ Khi quay tam giác } 60^\circ \text{ xung quanh trục } 30 \text{ cm ta được}$$

hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

Bài 21. Một hình nón có bán kính đáy bằng r , diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy.

Tính theo r

a) Diện tích xung quanh của hình nón;

b) Thể tích của hình nón.

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = 10\text{ cm}$, đường cao $AH = 4\text{ cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC . Tính thể tích hình tạo thành.

Bài 23. Một hình nón có bán kính đáy bằng 20 cm , số đo thể tích (tính bằng cm^3) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

Bài 24. Một hình nón có bán kính đáy bằng r , đường sinh bằng l . Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l .

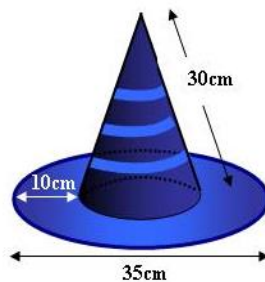
Bài 25. Một hình nón có bán kính đáy bằng 7 cm , chiều cao bằng 24 cm .

a) Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;

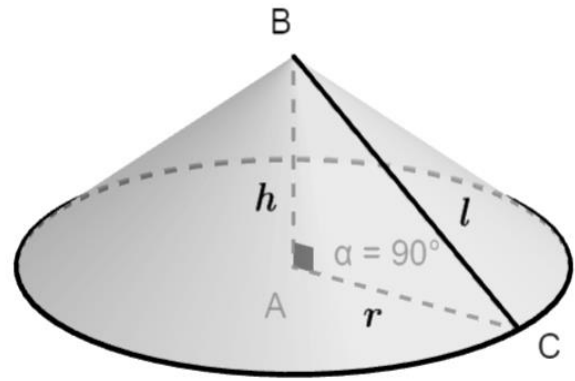
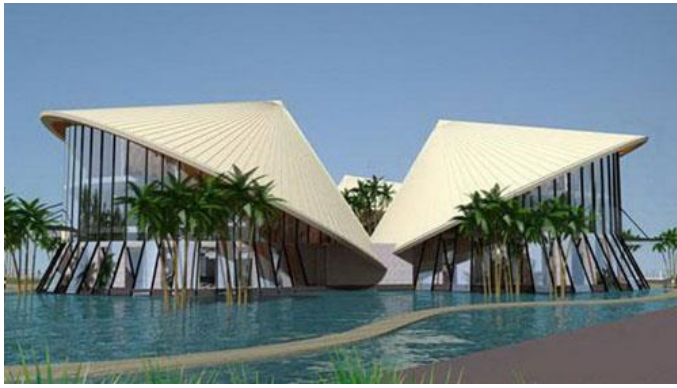
b) Tính diện tích toàn phần của hình nón.

Bài 26. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 28 cm và đường sinh bằng 30 cm . Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3,14$).

Bài 27. Tính lượng vải cần mua để tạo ra nón của chú Hề trong hình bên. Biết rằng tỉ lệ khấu hao vải khi may nón là 15% .

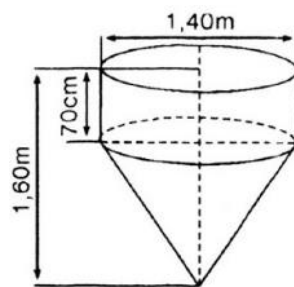


Bài 28. Nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm văn hóa nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng 3 chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam, mái nhà hình nón làm bằng vật liệu composite và được đặt hướng vào nhau. Em hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của mái nhà hình nón biết đường kính là 45 m và chiều cao là 24 m (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 29. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình bên. Hãy tính:

- Thể tích của dụng cụ này.
- Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đáy).



Bài 30. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804cm^2 , tính bán kính của phao.

Bài 31. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bỏ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314cm^2 . Tính thể tích của trái dưa đó.

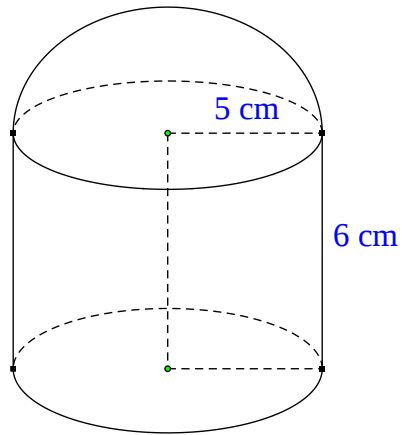
Bài 32. Trái đất có bán kính 6400km . Diện tích biển và đại dương chiếm $\frac{3}{4}$ bề mặt Trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của Trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

Bài 33. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài $94,2\text{cm}$. Hãy tính

- Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
- Thể tích của quả địa cầu.

Bài 34. Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính:

- Thể tích của bộ phận đó;
- Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



Bài 35. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm . Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

Bài 36. Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh ? Liễn được xem như một phần mặt cầu có đường kính 22cm. Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu. (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

